Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald E. Krogstad 73 59 35 36

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

fredag 14. august 1998
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt.
- Karl Rottmann: Matematisk formelsamling

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1

a) Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $2 + 2\sqrt{3}\,i$.

b) Finn løsningene til ligningen

$$z^2 + 2(1+i)z = 2 + 2(\sqrt{3} - 1)i.$$

Oppgave 2

Finn den generelle løsningen av differensialligningene

a) $y'' + y' - 2y = -4x^2$

b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}, \;\; x > 0.$

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem en basis for Row(A) (radrommet til A) og Col(A) (kolonnerommet til A) ved å bringe A over på echelon form.

b) Finn også en basis for Null(A) (nullrommet til A).

c) Bestem alle vektorer

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

slik at ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

<u>ikke</u> har løsning.

Oppgave 4

a) Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix},$$

det vil si at

$$P^T A P = D$$

der D er en diagonal matrise.

Skriv opp D og velg P slik at den representerer en rotasjon i planet.

Et kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$(*) \qquad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0.$$

b) Innfør et nytt koordinatsystem slik at $(*)$ kommer på enklest mulig (standard) form. Bestem hva slags kjeglesnitt $(*)$ representerer, skisser dette, og tegn også inn aksene i det nye koordinatsystemet.

c) Finn generell løsning til differensialligningssystemet

$$x' = 9x + 12y$$
$$y' = 12x + 16y.$$

Oppgave 5
Vis at dersom

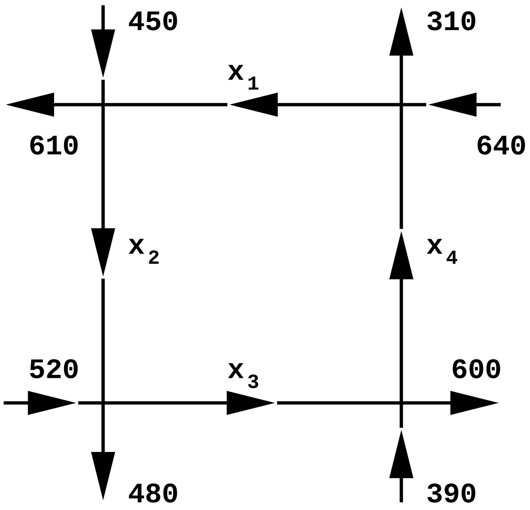
$$v_1, v_2, \ldots, v_k \qquad (v_i \neq 0)$$

er parvis ortogonale vektorer i $\mathbb{R}^n$, så er

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

lineært uavhengige.

Oppgave 6
I en by er det fire enveiskjørte gater som krysser hverandre som på figuren.



Figur 0.1: viser trafikkflyten i oppgave 6

Antall biler som passerer pr. time er angitt på figuren.

Vis at $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tilfredsstiller et ligningssystem på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

og løs det. Hva blir x_1, x_2 og x_3 når $x_4 = 200$?