Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Bjørn Dundas: 73 55 02 42

EKSAMEN I FAG SIF5009/5010 MATEMATIKK 3

Fredag 13.august 1999
Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne, tillatt.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y''' + y' = 4\cos x.$$

b) Finn alle konstanter k slik at $y = x^k$ er løsning av

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0,$$

og finn den generelle løsningen av differensialligningen.

c) Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$x^2y'' + xy' - y = -2x^2e^x, \quad x > 0.$$

d) Bevegelsesligningen for en partikkel med masse $m > 0$ som beveger seg langs x-aksen er gitt ved

$$mx'' + 2x' + x = 0.$$

For hvilke m vil bevegelsen være svingende (dvs. være en underdempet svingning)?

Oppgave 2

a) Finn den inverse til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La a være et reelt tall, og la

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Drøft hvordan rangen til M_a varierer med a.

c) Drøft dimensjonen til $\mathrm{Col}(M_a)$ og $\mathrm{Null}(M_a)$ for varierende a. For $a = -1$, finn en basis for $\mathrm{Col}(M_a)$ og $\mathrm{Null}(M_a)$.

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at $[1\ \ 1\ \ 1]^T$ er en egenvektor for A. Hva er den tilhørende egenverdien? Finn de andre egenverdiene med tilhørende egenvektorer.

b) Finn en ortogonal matrise P slik at $A = PDP^T$ der D er en diagonalmatrise. Angi D.

c) Løs differensialligningssystemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ og finn en løsning med $\mathbf{x}(0) = [3\ \ 0\ \ 0]^T$.

Oppgave 4

a) Tegn et endimensjonalt underrom av $\mathbf{R}^2$. Er mengden av vektorer $[x\ \ y\ \ z]^T$ i $\mathbf{R}^\mathbf{3}$ slik at $3x + 2y + z = 1$ et underrom av $\mathbf{R}^\mathbf{3}$?

b) Vis at dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ er parvis ortogonale vektorer i $\mathbf{R}^n$, og ingen av dem er nullvektoren, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige.

Oppgave 5

La

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en ortogonal matrise P med $\det(P) = 1$ slik at $D = P^T AP$ blir en diagonalmatrise. Angi D.

b) Ligningen

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$$

fremstiller et kjeglesnitt. Innfør et nytt, rotert koordinatsystem slik at kjeglesnittet ligger i standard posisjon i forhold til det nye systemet. Tegn kjeglesnittet og de nye aksene i x_1x_2-planet. Hva slags kjeglesnitt har vi?