Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad
Telefon: 73 59 35 13

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

Bokmål
Fredag 19. mai 2000
Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.
Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1

Finn alle reelle tall x, y slik at det komplekse tallet $z = x + iy$ oppfyller

$$\mathrm{Im}(z + i) = |z - i|.$$

Oppgave 2

a) Finn en løsning av differensialligningen

$$xy' + 3y = 3e^{x^3}$$

slik at $y(1) = 0$.

Finn den generelle løsning av følgende differensialligninger

b) $$y'' + 3y' + 2y = -2xe^{-x}$$

c) $$y'' - 2y' + 2y = 5\sin x$$

d) $$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Oppgave 3 Gitt initialverdiproblemet

$$y' = \sqrt{x+y},\ y(0) = \frac{1}{4}.$$

Tilnærm $y(\frac{3}{2})$ ved hjelp av Eulers metode med skrittlengde $h = \frac{1}{2}$.

Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og finn en basis for $\text{Null}(A)$.

b) Finn en basis for $\text{Row}(A)$ og $\text{Col}(A)$.

c) Vis at $\text{Col}(A)^\perp = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$, og finn en betingelse på a, b, c, d slik at ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

har løsning.

Oppgave 5

a) Vis at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

har 3 forskjellige egenverdier og finn en tilhørende egenvektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ for hver av dem.

Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) Løs differensialligningssystemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

En fuglebestand hekker i 3 forskjellige områder A, B og C. Hvert år foregår det et visst skifte av hekkeområde:

> Av de som et år hekker i A, hekker neste år $\frac{1}{6}$ i B og halvparten i C, mens resten kommer tilbake til A.
> Av de som hekker i B, hekker neste år $\frac{1}{3}$ i A og $\frac{1}{3}$ i C, resten kommer tilbake til B.
> Av de som hekker i C, hekker neste år halvparten i A og $\frac{1}{6}$ i B, resten kommer tilbake til C.

(Vi antar at fuglebestanden er stor nok til at de oppgitte tallene gir en realistisk tilnærming til den årlige fordelingen.)

La a_k, b_k og c_k være antallet fugler som hekker i området A, B og C det k-te året, og la $\mathbf{x}_k = (a_k, b_k, c_k)$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Finn en matrise M slik at $\mathbf{x}_k = M\mathbf{x}_{k-1}$ for $k = 1, 2, \ldots$.

Vis at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ fra punkt **a)** er egenvektorer for M, og finn de tilhørende egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

d) La $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ være slik at startfordelingen av fugler er gitt ved $\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.

Vis at $\mathbf{x}_1 = \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\lambda_3\mathbf{v}_3$, og deretter at

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \alpha_3\lambda_3^k\mathbf{v}_3$$

for alle $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Hva blir fordelingen av fuglene på lang sikt, det vil si når $k \to \infty$, når fuglebestanden består av 5000 fugler?