Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag Telefon: 73 59 35 21
Anne Kværnø Telefon: 73 59 35 42

EKSAMEN I FAG SIF5010 MATEMATIKK 3

Bokmål
Lørdag 19. mai 2001
Kl. 09.00 - 14.00

Hjelpemidler:
- Typegodkjent kalkulator med tomt minne
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

Sensuren faller 23. juni.

Oppgave 1

Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^3 = \frac{1-i}{1+i}.$$

Skriv løsningene på formen $re^{i\theta}$, og tegn løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

Løs initialverdiproblemene

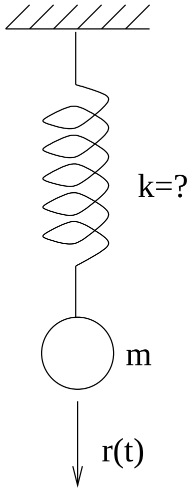
a) $y' + (\tan x)y = (\cos x)e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$

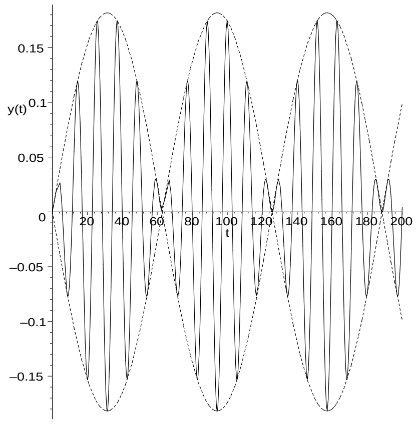
b) $y'' + y' - 2y = 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Finn den generelle løsningen av differensialligningen

c) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}, \quad x > 0.$

Oppgave 3





Figuren til venstre viser en fjærvekt uten dempning. Kulas bevegelse er beskrevet ved ligningen

$$my'' + ky = r(t)$$

hvor $y(t)$ er avstand fra likevektsposisjonen, m er kulas masse, k er fjærkonstanten og $r(t)$ er en ytre kraft som virker på kula.

Vi ser på situasjonen der

$$r(t) = 0.01\ \cos(0.5t),$$

og kulas hastighet og avstand fra likevektsposisjonen begge er lik 0 ved tidspunktet $t = 0$.

a) Hva blir $y(t)$ når $m \neq 4k$?

b) Kulas bevegelse blir målt, se figuren til høyre. Det viser seg at bevegelsen kan beskrives ved

$$y(t) = 0.182 \sin(0.05t) \sin(0.55t)$$

Hvis kulas masse $m = 1$, hva er da fjærkonstanten k?
(Se om nødvendig Rottmann s. 88.)

Oppgave 4

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Finn Null(A). Hva er løsningsmengden til

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ?$$

b) Finn en basis for Col(A), Row(A) og Row$(A)^{\perp}$.

Oppgave 5

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Finn egenverdiene til A uttrykt ved a.

For hvilke verdier av a har matrisen A to lineært uavhengige egenvektorer?

b) Løs differensialligningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

Oppgave 6

a) Begrunn at matrisen

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

er ortogonal og finn P^{-1}.

b) En 4×4 - matrise A har egenverdier 0, 1, 4 og 9 med tilhørende egenvektorer henholdsvis (1 -1 1 1), (-1 1 1 1), (1 1 -1 1) og (1 1 1 -1).

Finn en matrise M slik at $M^2 = A$.

Fins det flere enn to løsninger?

Oppgave 7

La V være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på $\mathbb{R}$. For hvilke r i V er løsningsmengden til differensialligningen

$$y'' + 2\,y' + 3\,y = r(x)$$

et underrom av V?