NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Gabriele Bruell[a], William Sanders[b]

Tlf:

Eksamensdato: 2. desember 2017

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Simple Calculator (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX , Citizen SR- 270X, Citizen SR-270X College, or Hewlett Packard HP30S), Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annan informasjon:
Grunngje alle svar og sørg for at det er tydeleg korleis du har komme fram til dei.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Skriv det komplekse talet $z = -1 + i\sqrt{3}$ på polarform.

b) Vis at $z = -1 + i\sqrt{3}$ er ei sjetterot av 64.

c) Skisser alle løysingar av $z^6 = 64$ i det komplekse planet.

Oppgåve 2 Lat $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

a) Vis at $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendeleg mange løysingar.

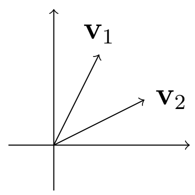
b) Skriv $\mathbf{b}$ som ein lineærkombinasjon av kolonnene til M.

c) Finn ein basis for kvar av dei følgjande: $\operatorname{Col} M$, $\operatorname{Row} M$, og $\operatorname{Nul} M$.

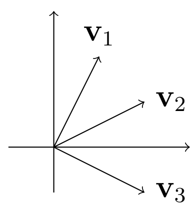
d) Finn determinanten til M.
Hint: Det finst ein snarveg. Dermed er utviding med kofaktorar ikkje naudsynt.

Oppgåve 3 Dei to bileta viser vektorar i $\mathbb{R}^2$.

a) Er vektorane $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ lineært uavhengige? Utspenner dei $\mathbb{R}^2$? Er dei ein basis for $\mathbb{R}^2$? Grunngje svara dine.



b) Er vektorane $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, and $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige? Utspenner dei $\mathbb{R}^2$? Er dei ein basis for $\mathbb{R}^2$? Grunngje svara dine.



Oppgåve 4 Sjå på likninga for ei udempa, kraftpåverka harmonisk rørsle:

$$y''(t) + y(t) = \cos(t - 2).$$

a) Finn den generelle løysinga for den homogene likninga.

b) Finn den generelle løysinga for den inhomogene likninga.

Oppgåve 5 Lat $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn løysinga til startverdiproblemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Vis at løysinga til startverdiproblemet

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

er eintydig.
Hint: Eintydig løysing tyder at for kvar og ein gjeve initialverdi $\mathbf{y}_0$ eksisterer det **berre ei** løysing $\mathbf{y}$.

c) Finn ei inverterbar matrise P og ei diagonalmatrise D sånn at $A = PDP^{-1}$.
Skriv ut P^{-1} eksplisitt.
Hint: A er symmetrisk.

Oppgåve 6 Lat $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, der

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Finn ein ortonormal basis for W.

Oppgåve 7 Lat $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lat $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vera avbildinga

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u},$$

som er den ortogonale projeksjonen på underrommet utspent av $\mathbf{u}$.

a) Skriv ned definisjonen av ein lineær transformasjon.

b) Vis at T er ein lineær transformasjon.
Hint: Du kan bruka at prikkproduktet (dot product) er linært utan bevis.

c) Finn matrisa A sånn at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.