Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Knudsen	73 59 35 23		
Ingelin Steinsland	73 59 16 99	mobil	926 63 096

EKSAMEN I FAG TMA4110 MATEMATIKK 3

Bokmål
Tirsdag 2. desember 2003
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator: (HP 30S),
Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Sensurdato: 02.01.2004.

Oppgave 1 Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

Skriv løsningene på formen $re^{i\theta}$, og tegn løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2

a) Bruk Eulers metode med skrittlengde $h = 1/2$ til å finne en tilnærmelse til $y(1)$, når det er gitt at

$$y' + 2xy = e^{-x^2} \qquad \text{og} \quad y(0) = 1.$$

b) Finn den eksakte verdien av $y(1)$. Hva synes du om valget av skrittlengde i punkt a)?

Oppgave 3

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 3y' + 2y = 2 + 6e^{-x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Finn den generelle løsningen av differensialligningene

b) $$y'' - y = e^{-x},$$

og

c) $$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\cos^2 x}, \qquad |x| < \pi/2.$$

Oppgave 4 I denne oppgaven skal vi se på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) For hvilke verdier av a er matrisen A inverterbar?

b) For hvilke verdier av t har ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 1 + t \\ x + 2y \qquad &= 2 + t \\ x \qquad + z &= 3 + t \end{aligned}$$

løsning?

c) Finn en basis for nullrommet til matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 5 Gitt vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for underrommet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ utspent av vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_5$, og finn også en basis for underrommet $V^\perp$ (det ortogonale komplementet til V i $\mathbb{R}^3$).

b) Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn på underrommet V.

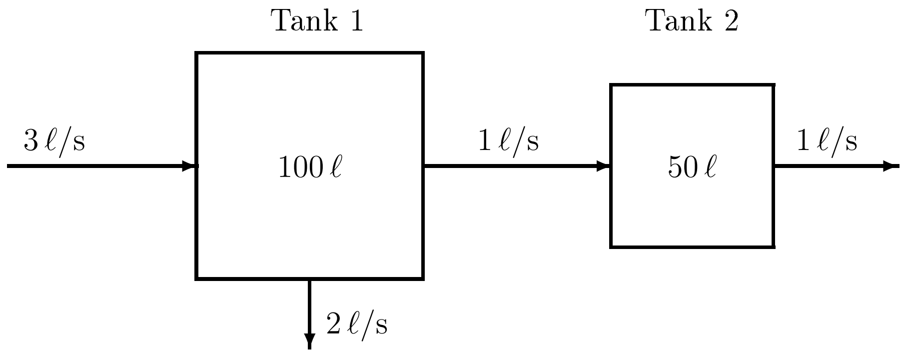
c) La $V \subseteq \mathbb{R}^n$, og anta at vi har gitt vektorer $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in V^\perp$. Vis at dersom ingen av vektorene $\mathbf{v}$ eller $\mathbf{w}$ er nullvektoren, så er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

Oppgave 6 Løs initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y - z & \qquad x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= x + 3y - z & \qquad y(0) &= 2 \\ \dot{z} &= \phantom{3x + 3y - {}} 2z & \qquad z(0) &= 1 \end{aligned}$$

Det oppgis at matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ har egenverdiene 2 og 4.

Oppgave 7 Figuren under viser to tanker som inneholder henholdsvis 100 liter og 50 liter saltvann. Tankene blir rørt slik at det hele tiden er jevn konsentrasjon av salt. Inn i tank nr. 1 strømmer det rent vann med en rate av 3 liter pr. sekund. Mellom tankene og ut av tankene strømmer saltoppløsning som vist på figuren. Begge tankene inneholder 100 gram salt til å begynne med.



Finn et system av differensialligninger som bestemmer saltmengdene $x_1(t)$ gram salt og $x_2(t)$ gram salt i henholdsvis tank 1 og tank 2 etter t sekunder, og bestem $x_1(t)$ og $x_2(t)$.