**Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen: Harald Krogstad og Dag Madsen
Telefon: 73 59 35 36 / 41 65 18 17 eller 73 59 66 82

# EKSAMEN I TMA4110 Matematikk3

Bokmål
Tirsdag 30. november 2004
Kl. 9-13
Hjelpemidler: C. (Godkjent kalkulator, Rottmann:Matematisk formelsamling)
Sensur: 21. desember 2004

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.*

## Oppgave 1

Finn alle komplekse tall $z$ slik at

$$z^3 = 1 + \sqrt{3}\, i.$$

Skriv løsningene på polarform, $re^{i\theta}$. Skissér løsningene i det komplekse plan.

## Oppgave 2

**(a)** Løs initialverdiproblemet $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

**(b)** Finn generell løsning til ligningen $y'' + 9y = 6e^{3x} + \sin 3x$.

**(c)** Finn generell løsning til ligningen $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, x > 0$.

## Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**(a)** Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bringe totalmatrisen (den utvidede koeffisientmatrisen) over på redusert trappeform (redusert Echelonform).

**(b)** Finn en basis for $\mathrm{Row}\,(A)$, $\mathrm{Col}\,(A)$, og $\mathrm{Row}\,(A)^{\perp}$. Angi også dimensjonen til hvert av disse vektorrommene.

## Oppgave 4

La $A$ være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

**(a)** Vis at egenverdiene til $A$ er $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$. Finn en basis for hvert egenrom.

**(b)** Hvis mulig, finn en inverterbar matrise $P$ og en diagonalmatrise $D$ slik at $P^{-1}AP = D$.

**(c)** Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{array}{rcrrr} y_1' & = & -2y_1 & -2y_2 & +4y_3, \\ y_2' & = & -4y_1 & & +4y_3, \\ y_3' & = & -4y_1 & -2y_2 & +6y_3, \end{array}$$

når $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 3,\ y_3(0) = 1$.

## Oppgave 5

Et vatn A i Bymarka skal behandles med rotenongift ved at det tilsettes $M$ kilo rotenon ved $t = 0$. Fra A renner ei elv ned i vatnet B. Vatnet A har et vannvolum $V$ og B et volum på $3V$. Vannføringa i elva ($\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$) ut fra A er $U$, mens mengden som strømmer ut fra B er $6U$. Vi antar at blandingen i vatn A og vatn B er helt jevn og at volumene av A og B er konstante.

**(a)** Vis at rotenonmengden i vatn A, $y_1(t)$, og B, $y_2(t)$, tilfredsstiller ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= -U\frac{y_1(t)}{V}, \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= U\frac{y_1(t)}{V} - 2U\frac{y_2(t)}{V},\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Hva blir startbetingelsene (initialbetingelsene) for $y_1$ og $y_2$?

**(b)** Finn løsningen av ligningssystemet i **(a)** ved å sette $U/V = 1$ og $M = 1$.

## Oppgave 6

I en $3 \times 3$-matrise er summen av elementene i hver rad lik 4. Vis at en slik matrise alltid vil ha en egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hva blir den tilhørende egenverdien?