Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Harald Krogstad og Dag Madsen
Telefon: 73 59 35 36 / 41 65 18 17 eller 73 59 66 82

EKSAMEN I TMA4110 Matematikk3

Bokmål
Tirsdag 30. november 2004
Kl. 9-13
Hjelpemidler: C. (Godkjent kalkulator, Rottmann:Matematisk formelsamling)
Sensur: 21. desember 2004

Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

Skriv løsningene på polarform, $re^{i\theta}$. Skissér løsningene i det komplekse plan.

Oppgave 2

(a) Løs initialverdiproblemet $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

(b) Finn generell løsning til ligningen $y'' + 9y = 6e^{3x} + \sin 3x$.

(c) Finn generell løsning til ligningen $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, x > 0$.

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å bringe totalmatrisen (den utvidede koeffisientmatrisen) over på redusert trappeform (redusert Echelonform).

(b) Finn en basis for $\text{Row}\,(A)$, $\text{Col}\,(A)$, og $\text{Row}\,(A)^{\perp}$. Angi også dimensjonen til hvert av disse vektorrommene.

Oppgave 4

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at egenverdiene til A er $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$. Finn en basis for hvert egenrom.

(b) Hvis mulig, finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

(c) Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - 2y_2 + 4y_3, \\ y_2' &= -4y_1 \qquad\quad + 4y_3, \\ y_3' &= -4y_1 - 2y_2 + 6y_3, \end{aligned}$$

når $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 3,\ y_3(0) = 1.$

Oppgave 5

Et vatn A i Bymarka skal behandles med rotenongift ved at det tilsettes M kilo rotenon ved $t = 0$. Fra A renner ei elv ned i vatnet B. Vatnet A har et vannvolum V og B et volum på $3V$. Vannføringa i elva (m^3/s) ut fra A er U, mens mengden som strømmer ut fra B er $6U$. Vi antar at blandingen i vatn A og vatn B er helt jevn og at volumene av A og B er konstante.

(a) Vis at rotenonmengden i vatn A, $y_1(t)$, og B, $y_2(t)$, tilfredsstiller ligningssystemet

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -U\frac{y_1(t)}{V},$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = U\frac{y_1(t)}{V} - 2U\frac{y_2(t)}{V},\ t \geq 0.$$

Hva blir startbetingelsene (initialbetingelsene) for y_1 og y_2?

(b) Finn løsningen av ligningssystemet i **(a)** ved å sette $U/V = 1$ og $M = 1$.

Oppgave 6

I en 3×3-matrise er summen av elementene i hver rad lik 4. Vis at en slik matrise alltid vil ha en egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hva blir den tilhørende egenverdien?