Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag tlf. 73 59 35 21
Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Mandag 9. august 2004
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn alle komplekse løsninger av ligningen

$$z^2 + (3+3i)z + 5i = 0$$

Skriv løsningene på formen $z = x + iy$, og tegn løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2 Finn alle reelle tall x, y slik at det komplekse tallet $z = x + iy$ oppfyller ligningen

$$|z+i| = |z-1|$$

Oppgave 3 Forklar hvorfor $y' = x^2 + y^2$ ikke er en lineær første ordens differensialligning. Bruk Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ til å tilnærme $y(0.2)$ når

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Oppgave 4 Finn en lineær homogen andreordens differensialligning $y'' + ay' + by = 0$ som har generell løsning

$$y = e^x \left(c_1 e^{x\sqrt{2}} + c_2 e^{-x\sqrt{2}} \right).$$

Oppgave 5 Løs differensialligningene

a) $y'' + y = \cos x$

b) $y'' + y = 1/\cos x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Oppgave 6 En tank inneholder til å begynne med 100 liter rent vann. Deretter strømmer en saltblanding med 50 gram salt pr. liter inn i tanken med en hastighet på 2 liter pr. minutt, og den fortynnede saltblandingen forlater tanken med samme hastighet.

Etter 10 minutter erstattes saltblandingen som strømmer inn i tanken med rent vann. (Væskestrømmen inn og ut av tanken er som før 2 $\ell/min.$)

a) Hvor mye salt er det i tanken etter 10 minutter?

b) Hvor mye salt er det i tanken etter 20 minutter?

Saltet holdes jevnt fordelt i tanken ved konstant omrøring.

Oppgave 7

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y \phantom{{}+2z} &= 1 \\ 3x + 7y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

b) For hvilke verdier av parametrene a og b har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y \qquad &= 1 \\ 3x + 7y + 2z &= b \\ 2x + 3y - az &= 0 \end{aligned}$$

i) Nøyaktig én løsning

ii) Nøyaktig to løsninger

iii) Uendelig mange løsninger

iv) Ingen løsninger

Oppgave 8 Hvis nullrommet $\mathrm{Null}(A)$ til en 5×6-matrise A har dimensjon 4, hva kan du si om dimensjonen til kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$ og radrommet $\mathrm{Row}(A)$?

Oppgave 9 Gitt vektorene $\mathbf{v}_1 = [2, 1, 0, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 0, 1, 0]$, $\mathbf{v}_3 = [4, 1, 0, 1]$ og $\mathbf{b} = [0, 0, 0, 9]$. Dersom $V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hva er da den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på

a) V?

b) $V^{\perp}$?

Oppgave 10

a) Finn egenverdier og egenvektorer for matrisen
$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

b) Foreta et variabelskifte $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ som bringer den kvadratiske formen

$$7x^2 + 2xy + 7y^2$$

over i en kvadratisk form uten kryssledd $(x'y')$. Angi matrisen P og den nye kvadratiske formen.

Oppgave 11 Gitt en diagonaliserbar matrise A, der enhver egenverdi er enten 1 eller -1. Vis at $A^{-1} = A$.