Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag tlf. 73 59 35 21
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Bokmål
Onsdag 2. juni 2004
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 23. juni

Alle svar (unntatt på oppgave 4) skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 *Komplekse tall*

a) Skriv det komplekse tallet

$$w = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}\right)^3$$

på formen $re^{i\theta}$. Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = w$. Skriv svaret på formen $a + ib$ der a og b er reelle tall. Bruk eksakte verdier for a og b.

b) La z være et vilkårlig komplekst tall. Et kvadrat $OABC$ i det komplekse tallplanet har ett hjørne i origo O. Hjørnene er angitt mot urviseren. Hvis hjørnet A er tallet z, hva blir hjørnene B og C uttrykt ved z?

Oppgave 2 *Førsteordens differensialligninger*

a) Løs initialverdiproblemet

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \qquad y(\pi/2) = 0.$$

b) Bruk Eulers metode med skrittlengde $h = 0.5$ til å finne tilnærmede verdier $y_1 \approx y(2.5)$ og $y_2 \approx y(3.0)$ for løsningen $y(x)$ av initialverdiproblemet

$$y' = 1 + (x - y)^2, \qquad y(2) = 1.$$

Oppgave 3 *Annenordens differensialligninger*

a) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}.$$

b) Differensialligningen

$$(*) \qquad (1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \qquad -1 < x < 1$$

har to løsninger av formen $y_1 = x + a$ og $y_2 = x^2 + b$ der a og b er konstanter. Bestem a og b ved innsetting. Begrunn at løsningene y_1 og y_2 er lineært uavhengige, og angi den generelle løsningen av $(*)$.

c) Finn en partikulær løsning av differensialligningen

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6\left(1 - x^2\right)^2, \qquad -1 < x < 1.$$

Oppgave 4 *Flervalgsoppgave*

Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.

a) La A og B være 2×2 – matriser. Hvis determinanten til A er 2 og determinanten til B er 3, hva er determinanten til $C = -2A^{-1}B^T$?

A: 3 **B:** -3 **C:** 6 **D:** -6

b) For hvilke(n) c er vektorene $\mathbf{v}_1 = (1, 3, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 4, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, c)$ lineært uavhengige?

A: Ingen c **B:** $c = 1$ **C:** $c \neq 1$ **D:** Alle c

Oppgave 5 *Matriser og lineære ligningssystem*

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Finn en basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$ og for kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$.

c) Vis at vektoren $\mathbf{y} = (1, 5, -3)$ ligger i $\mathrm{Col}(A)^\perp$. Hvilke andre vektorer består $\mathrm{Col}(A)^\perp$ av? Begrunn svaret.

Oppgave 6 *Egenverdier og egenvektorer*

a) Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{v}_1 = (-1, 3, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 1)$ er egenvektorer for A ved å regne ut $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$.

b) Bestem en egenvektor $\mathbf{v}_3$ for A slik at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige. Angi en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

c) La $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ og $y_3 = y_3(t)$ være deriverbare funksjoner av t. Løs differensial-ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= 4y_1 \phantom{{}+y_2} + 4y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 4y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelser $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 2$.

Oppgave 7 *Symmetriske matriser*

Vis generelt at hvis *alle* egenverdiene til en symmetrisk $n \times n -$ matrise A er positive ($\lambda > 0$), så er $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ for alle vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^n$.