Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I TMA4115 MATEMATIKK 3

Bokmål
Onsdag 8. juni 2005
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 29. juni

Alle svar (unntatt på oppgave 5) skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

Skriv det komplekse tallet $w = 8(1-i)/(1+i)$ på formen $re^{i\theta}$, og løs ligningen

$$z^3 = w.$$

Skriv løsningene på formen $a + ib$ med eksakte verdier for de reelle tallene a og b.

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \qquad y(1) = 3, \quad y'(1) = 2.$$

b) Finn generell løsning av differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = x^{1/3}e^{-x}.$$

Oppgave 3
I ligningssystemene $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -2 & -1 \\ 4 & -8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})\,.$$

a) Løs det homogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) For hvilken verdi (hvilke verdier) av c har det inhomogene ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning? Finn løsningen når ligningssystemet har løsning.

c) Finn en *ortogonal* basis for radrommet $\mathrm{Row}(A)$. Angi også en basis for det ortogonale komplementet $\mathrm{Row}(A)^{\perp}$.

Oppgave 4
Finn verdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Oppgave 5 *Flervalgsoppgave*
Svar uten begrunnelse ved å velge ett alternativ. Riktig svar: full score, galt svar: null score.

a) La A være en 4×5-matrise. Hvis nullrommet $\mathrm{Nul}(A)$ har dimensjon 3, hva er dimensjonen til kolonnerommet $\mathrm{Col}(A)$?

A: 1 **B:** 2 **C:** 3 **D:** 4

b) Hvilken av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ er en egenvektor for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}?$$

A: $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)$ **B:** $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ **C:** $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ **D:** $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 2)$

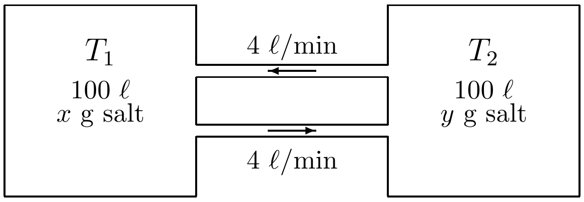
Oppgave 6

a) Finn egenverdiene og tilhørende egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvilke egenverdier og egenvektorer har matrisen kA når k er en konstant, $k \neq 0$?

b)



De to tankene på figuren inneholder hver 100 ℓ med saltoppløsning. Ved tidspunktet $t = 0$ inneholder T_1 ikke noe salt, $x(0) = 0$, og T_2 inneholder 10 g salt, $y(0) = 10$. Saltoppløsningen strømmer mellom tankene med konstant rate 4 ℓ/min. I hver tank holdes saltet jevnt fordelt ved omrøring. Finn $x(t)$ og $y(t)$ for alle $t > 0$.

Oppgave 7

La y_1 og y_2 være løsninger av differensialligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

på et åpent intervall I der p og q er kontinuerlige funksjoner, og la W betegne Wronskideterminanten til y_1 og y_2, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Vis at

$$(*) \qquad W' + p(x)W = 0 \qquad \text{for } x \in I.$$

Finn et uttrykk for løsningen av $(*)$, og bruk dette uttrykket til å begrunne at W må enten være identisk lik 0 eller aldri lik 0 på I.