NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Øystein Skartsærhagen

Tlf: 73593464

Eksamensdato: 1. juni 2017

Eksamenstid (fra–til): 9:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
– bestemt enkel kalkulator,
– Rottmann, Matematisk formelsamling

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av sju oppgaver med totalt tolv deler. Hver av de tolv delene teller like mye.

Alle svar må begrunnes.

Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☐	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = -8$ og tegn dem i det komplekse planet.

Oppgave 2

a) Finn to lineært uavhengige løsninger av den homogene differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

b) Finn «steady-state solution» av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 4\cos 2t$$

Oppgave 3 Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' - 8y = 12e^{-2t} + 8e^{2t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 4$$

Oppgave 4 I denne oppgaven lar vi $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ og $\mathbf{b}$ være de følgende vektorene i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix}1\\4\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix}3\\13\\1\\9\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix}9\\31\\5\\29\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\-17\\14\\13\end{bmatrix}$$

a) Vis at vektoren $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ og $\mathbf{a_3}$.

b) La $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon slik at

$$T(\mathbf{a_1}) = \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{a_2}) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad T(\mathbf{a_3}) = \begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}.$$

Finn $T(\mathbf{b})$.

Oppgave 5 La

$$M = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\2 & 4 & 3 & 7\\1 & 2 & 2 & 5\\3 & 6 & 6 & 15\end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for radrommet til M, og en basis for kolonnerommet. Hva er rangen til M?

b) Finn en ortogonal basis for nullrommet til M.

Oppgave 6 La $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

og finn $\mathbf{x}(5)$.

Oppgave 7 En symmetrisk 3×3-matrise A har egenverdier 1, 2 og 3.

a) Vis at matrisen $A^3 - A + I$ er diagonaliserbar.

b) Anta at $\mathbf{v}_1 = [1\ 1\ 2]^T$ og $\mathbf{v}_2 = [1\ 1\ \ -1]^T$ er egenvektorer som hører til egenverdiene 1 og 2. Finn en egenvektor som hører til egenverdien 3.