

TTT4265 Elektronisk systemdesign og -analyse I/II

## Oscillatorar, tilbakekopling, difflikningar, dynamiske system og litt til

Lars Lundheim

—

Institutt for elektroniske system

NTNU

2021

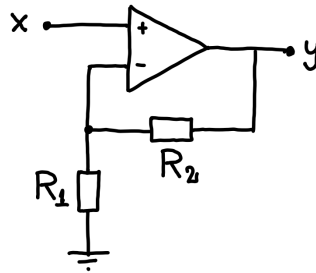
### 1 Innleiing

I dette notatet vil me sjå på samanhengen mellom fleire matematiske og elektroniske fenomen og omgrep. Det sentrale målet er å gje ei auka forståing av verkemåten til ein praktisk harmonisk oscillator, det vil seia eit elektronisk system som produserer ei (tilnærma) sinussvinging. I eit slikt system er fenomenet *tilbakekopling* sentralt, og me startar ut med å sjå nærare på dette. Vidare vil forklaringa byggja på teorien for andre ordens lineære differensiallikningar med konstante koeffisientar, og me ser på ein krets som – i teorien – vil ha ein oppførsel bestemt av ei slik likning, og me ser at ein slik krets vil – i teorien – kunne produsera ei sinussvingning. Men, me innser vidare at for å få til ein praktisk krets, må denne vera ulineær, og altså ha ein oppførsel styrt av ei *ulineær* differensiallikning. For å studera slike likningar treng me ein teori for dynamiske system.

Denne teorien er del av pensum i Matematikk 3 for Elsys, sjå [7], som me ikkje skal gå nærare inn på her. Men me brukar to omgrep frå dette stoffet, nemleg *fasediagram* og *grensesyklus*. Det kan vera lurt å friska opp dette stoffet før ein tek til på seksjon 7 i dette notatet. Til slutt demonstrerer me ein konkret oscillator basert på dei introduserte prinsippa.

## 2 Tilbakekopling i minnelause system

Ein operasjonsforsterkar (opamp) har som kjent ei forsterking  $A$  i storleiksorden fleire hundre tusen. Den nøyaktige verdien på  $A$  kjenner me vanlegvis ikkje til, og for dei fleste føremål er det nok å veta at han er “stor”. Me har sett på (sjå til dømes [1]) korleis me ved hjelp av ein slik komponent kan laga ein forsterkar med lågare men kontrollerbar forsterking, som vist i figur 1.



**Figur 1:** Ikkje-inverterande forsterkar med inngang  $x$  og utgang  $y$  realisert med opamp.

Kretsen er ein sokalla *ikkje-inverterande forsterkar* fordi, som me straks skal sjå, at utgangen er gjeven som  $y = Gx$  der  $G$  er eit positivt tal. Ved å rekna inngangsmotstanden til opampen uendeleg stor, finn me ved bruk av Kirchhoffs lover at

$$y = A \left( x - \frac{R_1}{R_1 + R_2} y \right) \quad (1)$$

som kan løysast slik at me får

$$y = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} x. \quad (2)$$

Det som er viktig i dette uttrykket er at når  $A$  er stor vert uttrykket  $1/A$  i nemnaren neglisjerbart, og me kan med god tilnærming skriva

$$y = \frac{1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2}} x = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) x. \quad (3)$$

Dermed kan me designa ein forsterkar med kjent forsterking  $G = 1 + R_2/R_1$  utan at  $A$  er nøyaktig kjent. Og skulle  $A$  endra seg grunna temperaturendring eller elding, er uttrykket (3) framleis gjeldande so lenge  $A$  er stor.

Me har altså laga eit system med ein oppførsel som avheng av dei relativt lett kontrollerbare komponentverdiane  $R_1$  og  $R_2$  samstundes som me har eliminert avhengnaden av den meir usikre storleiken  $A$ . Grunnen til at me får dette særns nyttige resultatet, er at me har nytta sokalla *negativ tilbakekopling*. Lat oss igjen sjå på uttrykket (1). Der ser me at storleiken  $y$  opptrer på begge sider av likskapsteiknet, det vil seia at verdien av  $y$  avheng av  $y$  sjølv. Og vidare, minusteiknet framfor  $y$  på høgresida viser at  $y$  på eit vis motarbeider seg sjølv. Dersom  $y$  endrar verdi, vil leddet

$$-\frac{R_1}{R_1 + R_2} y$$

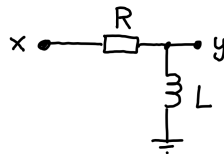
på høgresida motverka denne endringa. Me kan seia at tilbakekoplinga verkar til å *stabilisera* verdien til  $y$ . Denne stabiliseringa “betalar” me ved at den potensielle forsterkinga  $A$  som opampnen er i stand til å gje no vert redusert til en (vanlegvis) mykje lågare verdi  $G = 1 + R_2/R_1$ .

Oppførselen til eit system med utgang  $y$  som på denne måten avheng både av ein inngang  $x$  og utgangen sjølv, kan me generelt skriva som ein funksjon av to variablar:

$$y = f(x, y). \quad (4)$$

### 3 Reaktive system

I dømet med den ikkje-inverterane forsterkaren har me å gjera med eit *minnelaust* system, det vil seia eit system der tida ikkje spelar noko rolle. Verdien av utgangen  $y$  ved tidspunkt  $t$  er berre avhengig av inngangsverdien  $x$  på det same tidspunktet, og avheng heller ikkje av kor snøgt  $x$  eller  $y$  varierer. Når eit system inneheld reaktive element (spolar eller kondensatorar) får me ein annan situasjon, som me har eit døme på i figur 2.



**Figur 2:** Reaktivt system med inngang  $x$  og utgang  $y$ .

Kirchhoffs lover, samt elementlovene for motstand og spole gjev oss no likningane

$$i = \frac{x - y}{R}$$

og

$$y = L\dot{i}$$

som til saman gjev

$$y = \frac{L}{R}\dot{x} - \frac{L}{R}\dot{y}.$$

Dette er ei enkel fyrsteordens differensiallikning som me lett kan løysa dersom inngangen  $x(t)$  ikkje er alt for komplisert. Men det skal me ikkje bry oss med no. Det me skal bry oss med, er at me igjen har ein situasjon der utgangen  $y$  avheng både av inngangen  $x$  og seg sjølv. Eller meir presist: av den deriverte til desse storleikane. Me har altså ein situasjon der utgangen er gjeven ved ein funksjon<sup>1</sup>

$$y = f(x, \dot{x}, y, \dot{y}). \quad (5)$$

Alltid når me har med eit fyrste ordens system å gjera, kan systemet skrivast på denne måten.

For høgare ordens system, som inneheld meir enn ein spole eller kondensator, får me ei differensiallikning som inneheld høgare ordens deriverte:

$$y = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots; y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \quad (6)$$

<sup>1</sup>I teksten nyttar me det symbolet  $f$  for fleire ulike uttrykk. Det er altså ikkje den same funksjonen det er snakk om i (4) som i (5).

## 4 Lineære tidsinvariante system

Skrivemåten (6) tydeliggjør dette med tilbakekopling, altså at utgangen av systemet på eitt eller anna vis avheng av seg sjølv. I mange tilfelle er differensiallikninga *separabel*. Det vil seia at det er mogeleg å samla alt som har med  $y$  å gjera på venstre side og det som har med  $x$  å gjera på høgre. Då får me ei generell form som dette:

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) = g(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots)$$

Dersom, i tillegg, uttrykka  $f()$  og  $g()$  er gjevne som lineærkombinasjonar, får me noko slikt:

$$b_0y + b_1\dot{y} + b_2\ddot{y} + \dots = a_0x + a_1\dot{x} + a_2\ddot{x} + \dots \quad (7)$$

Dette kallast ei *lineær differensiallikning med konsante koeffisientar*.

Alle system som er samansett av spolar, motstandar og lineære styrte kjelder<sup>2</sup> har ein oppførsel som kan uttrykkjast med ein slik differensiallikning, og me kallar slike system *lineære, tidsinvariante system*.

Ein spesiell klasse av slike system, er dei me kallar passive lineære *filter* med inngang  $x$  og utgang  $y$ . Det er kretsar som er samansett av motstandar, spolar og kondensatorar, og, som me tidlegare har sett, kan analyserast ved hjelp av frekvensresponsen  $H(\omega)$ . Ein heilt annan type lineært, tidsinvariant system er slike som ikkje har noko inngangssignal. Det vil seia at høgresida i (7) er lik null, og systemet sin oppførsel er fullstendig bestemt av eigenskapane til den homogene differensiallikninga

$$b_0y + b_1\dot{y} + b_2\ddot{y} + \dots = 0.$$

Spesielt skal me sjå på slike sytem av orden 2, og med tilsvarande notasjon som i [2] har me då

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0. \quad (8)$$

Denne likninga har løysingar på forma<sup>3</sup>

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t},$$

der  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er løysingar av *den karakteristiske likninga*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (9)$$

Denne har som kjent løysingar gjeve ved

$$\lambda = -\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (10)$$

<sup>2</sup>Kjelder der det er ein lineær samanheng mellom den styrte storleiken og den styrande. Eit døme er småsignalmodellen for ein NMOS-transistor der  $i_d = g_m v_g$ .

<sup>3</sup>Med unntak av det tilfellet at (9) har éi reell rot med dobbel multiplisitet, noko me ser bort ifrå i denne omgangen.

Vidare skal me konsentrera oss om det tilfellet der (9) har komplekskonjugerte røter, dvs. når  $p^2 - 4q < 0$ . I det tilfellet kan (10) med litt omskriving uttrykkest som

$$\lambda = -\delta \pm j\omega$$

der me har definert

$$\delta = \frac{p}{2} \tag{11}$$

og

$$\omega = \sqrt{q - \delta^2}.$$

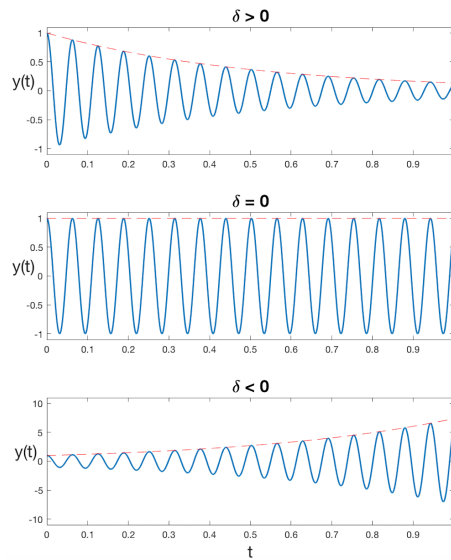
Då må me og ha at<sup>4</sup>  $c_1 = c_2^* = c$  og me får løysingar på forma

$$y(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi) \tag{12}$$

der  $A = |c|$  og  $\phi = \angle c$ . Verdien til (den komplekse)  $c$  kan bestemmast frå initialvilkår for  $y$  og  $\dot{y}$ .

Løysinga er ikkje gjeven på denne forma i [2], men det er ikkje vanskeleg å gå frå forma i [2] til (12).

Storleiken  $\delta$  (delta) kallast *dempingskonstanten* til likninga, og dersom me ser nærare på uttrykket (12), er det eit naturleg namn. Me ser av uttrykket at  $y(t)$  er ein funksjon som svingar med vinkelfrekvens  $\omega$ , som me vil kalla *svingefrekvensen*, og som har eit utslag som minkar eksponentielt når  $\delta > 0$ . Figur 3 illustrerer oppførselen for ulike verdiar av dempingskonstanten.



**Figur 3:** Oppførsel til løysing av andreordens differensiallikning avhengig av verdien til dempingsfaktoren  $\delta$  gjeve ved (12). I alle eksempla er  $A = 1$  og  $\phi = 0$ .

<sup>4</sup>Her, og elles i elektronikken, er det vanleg å bruka notasjonen \* for kompleks-konjugering.

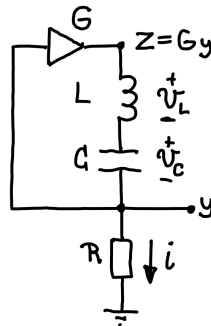
Me ser tydeleg korleis utslaget til svingningane minkar, er konstant eller aukar avhengig av om dempingskonstanten er høvevis positiv, null eller negativ. Me har og teikna inn med raudt funksjonen

$$e^{-\delta t}.$$

Denne funksjonen, som bind saman topp-punkta til svingingane, kallast *omhyllingskurva* eller *envelopen* til  $y(t)$ . Det er eit uttrykk me ofte får bruk for i tilfelle der me har ei svinging med tidsvarierende utslag (amplitude).

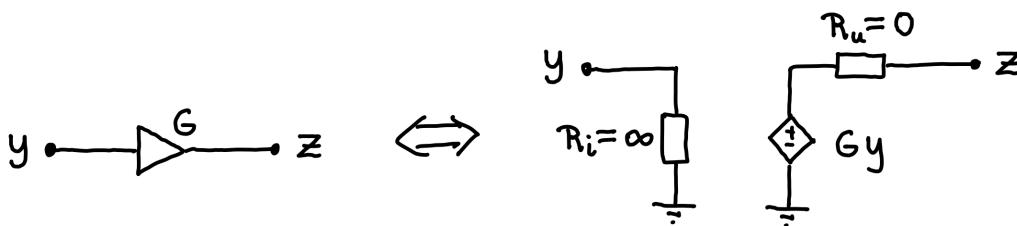
## 5 Eit teoretisk interessant tilfelle

Me ser no på ein konkret krets<sup>5</sup>, som vist i figur 4.



**Figur 4:** Ein krets som skal visa seg å ha stor teoretisk verdi

Det trekanta symbolet symboliserer ein (ideell) forsterkar, altso eit delsystem som sørger for at  $z = Gy$  der  $G$  er eit positivt tal. Me vil og gå ut ifrå at forsterkaren har uendeleg stor inngangsmotstand, slik at det ikkje gjeng straum i inngangen. Me kan modellera dette delsystemet som i figur 5.



**Figur 5:** Modell av ein ideell forsterkar

Ein slik forsterkar kan til dømes realiserast med den ikkje-inverterande forsterkaren som me hadde i figur 1.

Som me ser av figur 4, finst ingen inngang til systemet, og utgangen  $y$  påverkar seg sjølv gjennom forsterkaren  $G$ . Differensiallikninga for kretsen finn me ved Kirchhoffs lover og ele-

<sup>5</sup>Ved fyrste augnekast kan det sjå ut som om kretsen her ikkje er slutta, men det er han. Det kjem tydeleg fram ved å erstatta den trekanta blokka med modellen i figur 5.

mentlovene for dei involverte kretselementa. Sidan det ikkje gjeng straum i inngangen på forsterkaren, må den same straumen  $i$  gå gjennom både  $L$ ,  $C$  og  $R$ . Ohms lov gjev då

$$i = \frac{y}{R}. \quad (13)$$

Kirchhoffs spenningslov gjev vidare at

$$\begin{aligned} Gy &= y + v_C + v_L \\ &= y + v_C + Li \end{aligned} \quad (14)$$

slik at kondensatorspenninga kan skrivast

$$\begin{aligned} v_C &= (G - 1)y - Li \\ &= (G - 1)y - \frac{L}{R}\dot{y} \text{ ved (13)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Elementlova for kondensatoren saman med (13) gjev

$$\frac{y}{R} = C\dot{v}_C \quad (16)$$

slik at (15) og (16) leier til differensiallikninga

$$\frac{y}{R} = C(G - 1)\dot{y} - C\frac{L}{R}\ddot{y}.$$

Denne kan me rydda litt slik at me får

$$\ddot{y} + (1 - G)\frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = 0. \quad (17)$$

Me ser at denne likninga har same form som (8), og me gjeng ut ifrå at komponentane  $R$ ,  $L$  og  $C$  er slik at me får komplekskonjugerte røter.

Samanliknar me (17) med (8), finn me at me får

$$p = (1 - G)\frac{R}{L}$$

og

$$q = \frac{1}{LC}.$$

Då får me ved (11) ein dempingsfaktor

$$\delta = (1 - G)\frac{R}{2L} \quad (18)$$

og ein svingefrekvens

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (19)$$

der me har definert

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

som me kjenner att som resonansfrekvensen til eit andre ordens  $RCL$ -bandpassfilter med spole- og kondensatorverdiar høvesvis  $L$  og  $C$ .

Frå (12) får me dermed at

$$y(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t). \quad (20)$$

Me har sløyfa fasen  $\phi$  frå (20) då den eigentleg berre har å gjera med kvar me definerer nullpunktet for tidsaksen.

Uttrykket (20) seier oss noko vesentleg om systemet i figur 4 basert på ein ideell forsterkar  $G$ . Nemleg at utgangen  $y$  vil oscillera med frekvensen  $\omega$  med eit tidsavhengig utsving styrt av dempingskonstanten  $\delta$  som igjen avheng av forsterkingsfaktoren  $G$  (som me reknar som positiv). Frå (18) og figur 3 finn me då at me har tre typar oppførsel:

$G < 1$ : Svingningane er eksponentielt dempa.

$G = 1$ : Svingningane har konstant amplitude.

$G > 1$ : Svingningane aukar eksponentielt.

I mange tekniske samanhengar er me interesserte i oscillatorar som gjev eit stabilt sinusforma signal med konstant amplitude og frekvens. Dette er nettopp det me får i tilfelle  $G = 1$ . I dette tilfellet får me og at  $\delta = 0$  slik at (19) gjev ein svingefrekvens  $\omega = \omega_0$ .

Systemet i figur 4 kan me kalla ein lineær oscillator, sidan det er eit lineært system og kan produsera eit sinusforma signal når  $G = 1$ . Diverre har den lineære oscillatoren i fyrste omgang berre teoretisk interesse. Grunnen er at me aldri vil kunne få forsterkinga  $G$  nøyaktig lik 1. Anten vil ho vera litt mindre, slik at svingningane døyr ut, eller ho vil vera litt større, slik at svingningane aukar, det me kallar ustabil oppførsel. Me skal snart sjå på korleis me kan modifisera systemet slik at det kan ha praktisk nytte.

## 6 Ei generalisering

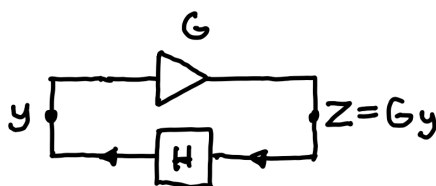
Før me gjeng over til meir praktiske system, skal me generalisera litt det me fann ut om den lineære oscillatoren. Sjå fyrst igjen på figur 4. Dersom me isolerer kretsen mellom punkta  $z$  og  $y$ , ser me at me har eit RLC-bandpassfilter med inngang  $z$  og utgang  $y$ . Me kan dermed teikna figuren som vist i figur 6.

I figuren har me merka bandpassfilteret med frekvensresponsen  $H(\omega)$ . Lat oss no tenkja oss at innhaldet i boksen er eit vilkårleg linært system. Det vil seia at  $H(\omega)$  kan vera ein frekvensrespons som ikkje naudsynlegvis er eit bandpassfilter. Kva kan me då seia om forma til  $y(t)$ ?

Vel, me har då at inngangen til filteret må vera  $z = Gy$ . Det vil seia at

$$y(t) = G^{-1}z(t)$$





**Figur 6:** Generalisering av systemet i figur 4 teikna som frekvensavhengig tilbakekopling av ein forsterkar.

som medfører at utgangen av filteret er ein konstant tal multiplisert med inngangen. Det vil seia at  $y(t)$  må vera ein *eigenfunksjon* til operatoren representert ved filteret. Me veit frå før (sjå til dømes [4]) at eigenfunksjonane til lineære (tidsinvariante) system er på forma

$$y(t) = e^{j\omega t},$$

og dermed får me at

$$y(t) = H(\omega)Gy(t)$$

slik at

$$H(\omega) = G^{-1}, \tag{21}$$

eller me må ha oppfylt kravet at

$$H(\omega)G = 1. \tag{22}$$

Og no kjem det viktige: Hugs at  $H(\omega)$  generelt er eit komplekst tal. Sidan  $G$  er reell, vil altso (21) seia at  $H(\omega)$  òg må vera reell for frekvensen  $\omega$ . Det oppstår berre når fasen  $\angle H(\omega) = k\pi$  for  $k$  heiltal. Eller, for positiv  $G$  må me ha  $H(\omega) = 0$  eller  $2\pi, 4\pi, \dots$ . For negativ  $G$  må me ha  $H(\omega) = \pi$  eller  $3\pi, 5\pi, \dots$

Me får altso at ein slik lineær oscillator vil kunne svinga med frekvensen  $\omega$  dersom to kriterium er oppfylde. Det fyrste er (22) som seier at den totale forsterkinga rundt sløyfa lyt vera lik 1 for frekvensen  $\omega$ . Det andre er at den totale fasedreininga rundt sløyfa lyt vera 0 for frekvensen  $\omega$ . Desse vilkåra kallast *Barkhausen-kriteria*<sup>6</sup>. for ein lineær oscillator, og vert ofte siterte i litteraturen. Det som ofte ikkje vert presisert er nettopp at ein slik oscillator ikkje let seg realisera i praksis!

Kan ein lineær oscillator svinga på meir enn ein frekvens samstundes? Det ville i tilfelle krevja at frekvensresponsen  $H(\omega) = G^{-1}$  for meir enn ein frekvens. Det skulle ikkje vera umogeleg i prinsippet, men endå vanskelegare å få til i praksis, som me kom fram til på s. 8.

## 7 Fasediagrammet: eit nyttig verkty

Kretsen i figur 4 er døme på eit *dynamisk system*, som eigentleg er eit anna ord for noko som kan skildrast av eit system av differensiallikningar der den frie variabelen er tid. Differensiallikninga var i dette tilfellet på forma (8). Dersom me innfører variabelnamna  $y_1 = y$  og  $y_2 = \dot{y}$ , kan systemet skrivast på forma

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$$

<sup>6</sup>Formulert av Heinrich Georg Barkhausen [3]

der

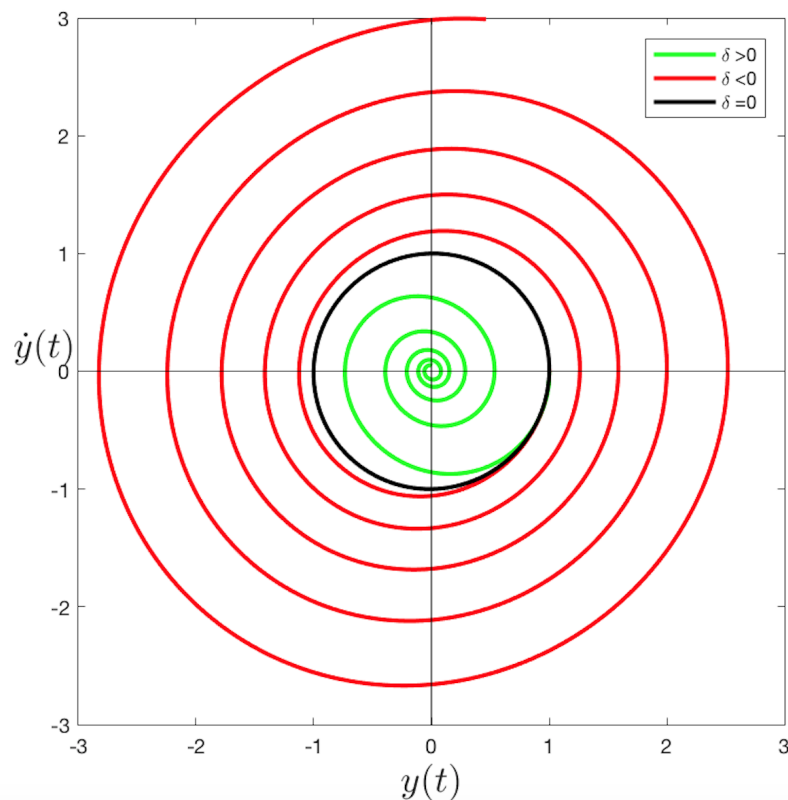
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

og

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$$

Sjekk sjølv at dette stemmer.

Oppførselen over tid kan då illustrerast gjennom *fasediagrammet* der me plottar  $y_1 = y$  langs horisontalaksen og  $y_2 = \dot{y}$  langs vertikalaksen. I situasjonen med  $\delta = 0$  har me løysing  $y = \cos(\omega t)$  Då vert  $\dot{y} = -\omega \sin(\omega t)$  og, med høveleg skalering på aksane, får me eit fasediagram som vist i den svarte kurva i figur 7, nemleg ein sirkel.



**Figur 7:** Døme på fasediagram for eit lineært system med komplekskonjugerte røter og ulike verdiar for dempingsfaktoren  $\delta$ .

Kva skjer ved andre verdiar av dempingsfaktoren  $\delta$ ? Det er vist ved den grøne og raude kurva i figuren. For  $\delta > 0$ , har me tidlegare sett at svinginga døyrt ut, og endar då opp som eit punkt i origo. Ved positiv  $\delta$  aukar utslaga til svingningane eksponentielt, slik at banen i fasediagrammet spiralerar utover. Det er døme på ein ustabil situasjon.

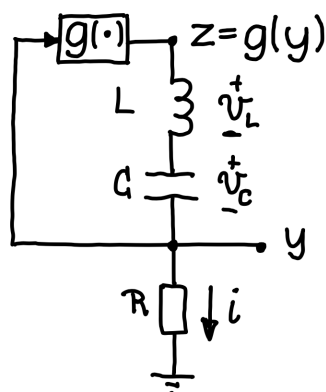
Slike todimensjonale fasediagram kan og nyttast til å studera andre typar system av orden 2, der me har  $y$  på horisontalaksen og  $\dot{y}$  på vertikalaksen. Mykje kan lesast ut av eit slikt diagram, men skal berre sjå på nokre punkt.

For det fyrste, dersom  $y(t)$  er ein periodisk funksjon, må fasediagrammet utgjera ei slutta sløyfe, til dømes ein sirkel. Alle lineære system vil ha slike sirkulære banar (eller elliptiske dersom aksane ikkje er høveleg skalerte.) Vidare må eit punkt langs banen røyra seg i retning *med klokka*. Det ser du dersom du tek føre det til dømes fyrste kvadrant, det vil seia der både  $y$  og  $\dot{y}$  er positive. So lenge  $\dot{y}$  er positiv, må  $y$  auka, heilt til  $\dot{y} = 0$ . Då kryssar banen horisontalaksen,  $\dot{y}$  vert negativ og  $y$  startar å minka. Tilsvarande kan ein resonnera for alle kvadrantane.

## 8 Ein praktisk oscillator

I del 5 såg me på ein oscillator krets som teoretisk sett ville kunne brukast til å generera eit sinussignal, men som i praksis anten ville verta ustabil, ved forsterking  $G > 1$ , eller ville ha utdøyande svingingar ved  $G < 1$ . Me skal no sjå på korleis me kan modifisera kretsen slik at varige, stabile sinussvingingar på utgangen vert resultatet.

I figur 8 har me forandra designet frå figur 4 litt.



**Figur 8:** Generalisering av systemet i figur 4 ved å erstatta forsterkinga  $G$  med ein generell funksjon  $g(\cdot)$ .

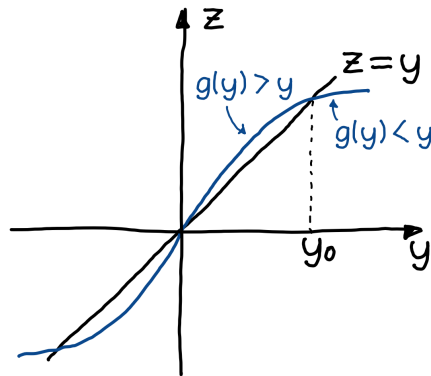
Som me ser, har me erstatta forsterkaren  $G$  med ein meir generell funksjon  $g(y)$ . Det vil seia at systemet i figur 4 vert eit spesialtilfelle av figur 8 ved å setja  $g(y) = Gy$ . Då kan me, ved tilsvarande argument som i del 5 koma fram til at utgangen  $y$  er løysing av fylgjande differensiallikning.

$$\ddot{y} + \frac{R}{L} \left[ \dot{y} - \frac{d}{dt}g(y) \right] + \frac{1}{LC}y = 0. \quad (23)$$

Som me ser, vil me ved å setja  $g(y) = Gy$  få det same som me hadde i (17). Det er viktig å merka seg at (23) generelt no vil vera ei *ulinear* differensiallikning, og me kan ikkje generelt rekna med at det fins eit enkelt matematisk uttrykk for funksjonen  $y(t)$ .<sup>7</sup>

Lat oss no sjå på ei mogleg form for  $g(y)$  som vist i figur 9.

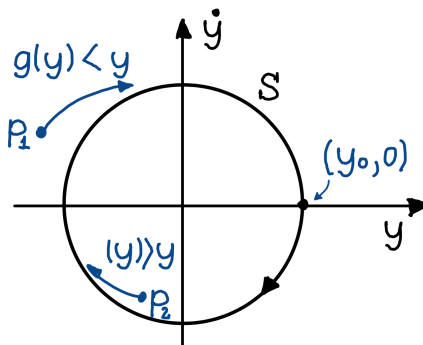
<sup>7</sup>Men det betyr ikkje at funksjonen ikkje eksisterer!



**Figur 9:** Døme på ulineæar funksjon  $g(y)$  som oppfyller  $g(y) > y$  når  $|y|$  er liten og  $g(y) < y$  når  $y > y_0$ .

I figuren er  $g(y)$  slik at han for små verdier av  $y > 0$  kan skrivast som  $g(y) \approx Gy$  der  $G$  er litt større enn 1. Ettersom  $y$  aukar, flatar  $g(y)$  ut, slik at grafen kryssar lina  $z = y$  ved verdien  $y = y_0$ . Dermed får me at  $g(y) > y$  for  $y < y_0$  og at  $g(y) < y$  for  $y > y_0$ . Funksjonen  $g(y)$  er føresett odde, slik at tilsvarende gjeld for  $y < 0$  som illustrert i figuren. For  $|y|$  nær  $y_0$  får me at  $g(y) \approx Gx$  der  $G > 1$  for  $|y| < y_0$  og  $G < 1$  for  $|y| > y_0$ .

Tanken er at so lenge grafen til  $g(y)$  ligg nær den rette lina  $y = z$ , vil systemet oppføra seg *tilnærma likt* det lineære systemet gjeve ved (17). Det vil seia at fasediagrammet til den ulineære likninga vil vera tilnerma sirkulært slik me hadde det for  $\delta = 0$  i figur 7. Lat oss tenkja oss at denne tilnærma sirkulære banen  $S$  gjeng gjennom punktet  $(y_0, 0)$  som vist i figur 10.



**Figur 10:** Fasediagram for ulineær differensiallikning (23) der  $g(y)$  har form som i figur 9.

Lat oss no tenkja oss at systemet (til dømes grunna støy) havnar i ein situasjon der punktet  $p_1 = (y, \dot{y})$  i fasediagrammet ligg *utanfor* sirkelen. Då er  $|y| > y_0$  slik at  $g(y) < y$ . Dermed kan me tenkja oss at systemet oppfører seg *tilnærma* som eit lineært system med  $G < 1$ . Dermed vil banen spiraliserer *innover* og stabiliserer seg på sirkel-bana att. Tilsvarende gjeld dersom me er i ein tilstand *innanfor* sirkelen, til dømes ved oppstart av systemet. Då er  $g(y) > y$  og banen vil spiraliserer *utover* mot sirkelen. Dermed representerer sirkelen  $S$  det me kan kalla ein *stabil tilstand* for systemet. I lineær systemteori (sjå til dømes [7]) kallast ein slik bane ein *grensessyklus*.

## 9 Ein meir matematisk stringent argumentasjon

i [2] er Liénards likining introdusert:

$$\ddot{y} + f(y)\dot{y} + h(y) = 0. \quad (24)$$

For eit system styrt av (24) gjeld (sitert<sup>8</sup> frå [2]):

### Teorem (Lienard's teorem)

Anta at funksjonene  $f$  og  $h$  tilfredsstillar følgende kriterier.

- (i)  $f$  og  $h$  er kontinuerlig deriverbare.
- (ii)  $h$  er en odde funksjon.
- (iii)  $h(y) > 0$  for  $y > 0$
- (iv)  $f$  er en jevn funksjon.
- (v) Funksjonen  $F(y) = \int_0^y f(u)du$  har nøyaktig ett nullpunkt  $y = a$  for  $y > 0$ . Videre er  $F(y) < 0$  på  $0 < y < a$  og  $F(y) > 0$ ,  $F'(y) \geq 0$  på  $y > a$ , med  $F(y) \rightarrow \infty$  når  $y \rightarrow \infty$ .

Da har Lienards likning en unik stabil grensesyklus rundt origo.

Me skal no påvisa at (23) er ei likning som faktisk oppfyller desse kriteria. Me startar med å bruka kjerneregelen på uttrykket

$$\frac{d}{dt}g(y)$$

i (23).

Då får me

$$\ddot{y} + \frac{R}{L} \left[ \frac{dg}{dy} \dot{y} - \dot{y} \right] + \frac{1}{LC}y = 0 \quad (25)$$

som gjev

$$\ddot{y} + \frac{R}{L} \left[ \frac{dg(y)}{dy} - 1 \right] \dot{y} + \frac{1}{LC}y = 0, \quad (26)$$

som kan skrivast på forma (24) dersom me definerer

$$h(y) = \frac{1}{LC}y$$

og

$$f(y) = \frac{R}{L} \left[ \frac{dg(y)}{dy} - 1 \right].$$

<sup>8</sup>Notasjonen er litt endra, då me brukar  $y$  i staden for  $x$  og  $h$  i staden for  $g$ .

Då gjenstår det å visa at kriteria (i) – (v) ovanfor er oppfylde. Dei fire fyrste bør du greia sjølv. Lat oss sjå litt nærare på (v). Me finn at funksjonen  $F$  vert gjeven ved

$$F(y) = \frac{R}{L} [g(y) - y],$$

og ser me på figur 9, har denne funksjonen nøyaktig eitt nullpunkt i posisjon  $y = y_0$ , altså der  $g(y)$  kryssar lina  $z = y$ .

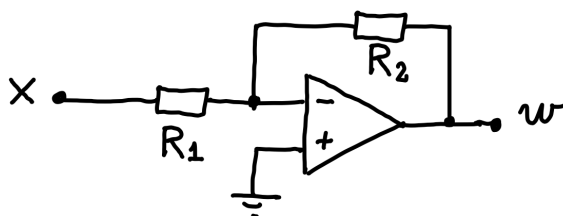
Dermed har me vist at oscillatoren produserer eit stabilt, periodisk signal  $y(t)$ . Me har ikkje vist at signalet er reint sinusforma. Men dersom me får eit tilnærma sirkelforma fasediagram, vil og signalet vera tilnærma sinusforma.

## 10 Realisering av ulineær funksjon

Me skal no sjå på korleis me kan realisera ein funksjon  $g$  med ei form som liknar den me har i figur 9.

### 10.1 Ulineær forsterkar med opamp og dioder

Frå figur 9 ser me at det me prøvar laga er noko som liknar ein ikkje-inverterande forsterkar. Det kunne då vera freistande å ta utgangspunkt i designet i figur 1. Problemet med den er at han berre kan realisera forsterkingar større enn 1, medan me ynkjer noko som både kan ha forsterking litt større enn 1 (når  $|y| < y_0$ ) og litt mindre enn 1 når  $|y| > y_0$ . Me tek difor, i fyrste omgang, utgangspunkt i den inverterande forsterkaren i figur 11.



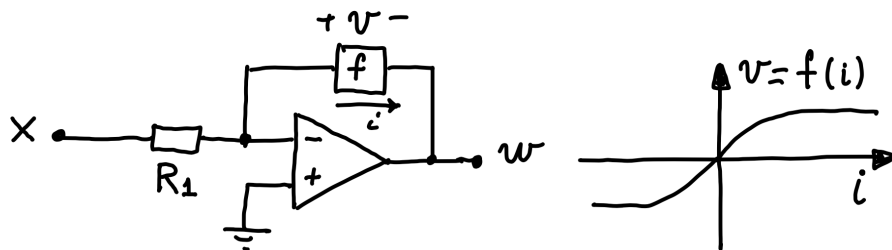
Figur 11: Inverterande forsterkar.

Denne har som kjent oppførselen  $w = Gy$  der  $G = -R_2/R_1$ . Ein måte å få til ein ulineær oppførsel på, kan vera å erstatta motstanden  $R_2$  med noko som oppfører seg som ein motstand for små spenningar men som har ein oppførsel gjeve ved ei “ulineær” Ohms lov  $v = f(i)$  som vist i figur 12.

Brukar me Kirchhoffs lover og same utleiing som for kretsen i figur 11 (sjå til dømes [5]) får me

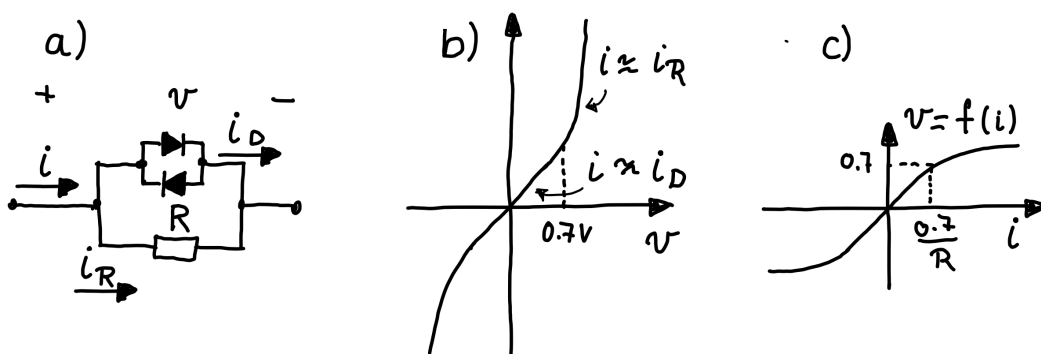
$$w = -\frac{f\left(\frac{x}{R_1}\right)}{R_1}$$

Om me so kombinerer systemet med ein forsterkar med forsterking -1, får me oppførselen me ynskjer.



Figur 12: Inverterande forsterkar med  $R_2$  erstatta med "ulineær motstand"  $f(i)$ .

Ein måte å realisera funksjonen  $f$  kan vera ved hjelp av to dioder og ein motstand som vist i figur 13 a).



Figur 13: a) Realisering av ulineært kresselement. b) Resulterende elementlov  $i(v)$  c) Den realiserte funksjonen  $v = f(i)$

Sidan diodene er koplta kvar sin veg, kan me rekna med at berre ei om gangen leier. Totalstraumen gjennom koplinga kan då skrivast

$$i = i_D + \frac{v}{R}$$

Brukar me den eksponentielle diodemodellen (sjå til dømes [6])

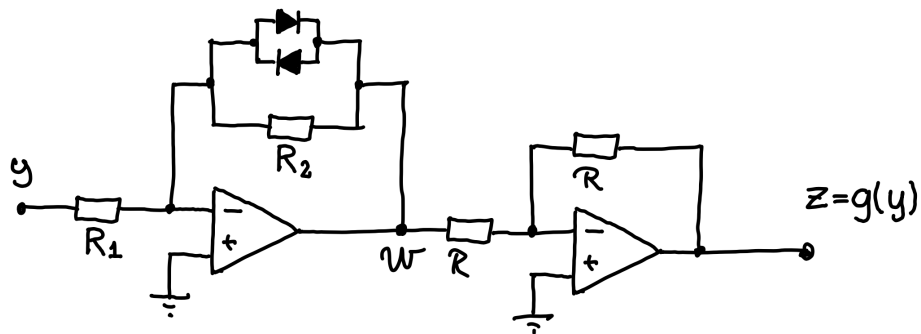
$$i_D = I_0(e^{\frac{v}{V_0}} - 1)$$

finn me at spenninga over parallellkoplinga er gjeven ved

$$v = V_0 \ln \left( 1 + \frac{i_D}{I_0} \right).$$

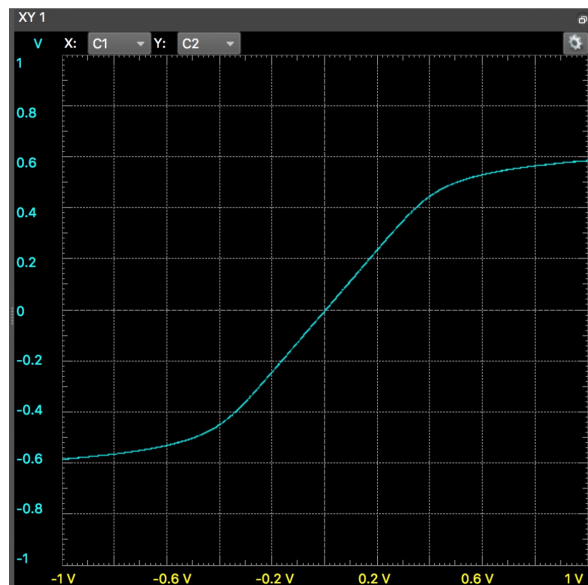
For små verdiar av  $v$  er straumen  $i_D$  neglisjerbar, slik at parallellkoplinga vil oppføra seg som motstanden  $R$ , og me får ein tilnærma lineær oppførsel rundt origo. Når spenninga  $v$  nærmar seg 0.7 volt (for silisiumdioder) vil dioda byrja leia, og snart vert straumen gjennom parallellkoplinga dominert av diodestraumen, slik at med få ein oppførsel som skissert i figur 13 b). Funksjonen  $f(i)$  vert no den inverse av funksjonen i figur 13 b), som er skissert i figur 13 c).

I figur 14 ser me ei full implementering av funksjonen  $g(y)$  med opampane i ein LF353, to dioder av type 1N4448 og motstandsvediar  $R_1 = 1$  kohm,  $R_2 = 1.2$  kohm og  $R = 10$  kohm.



**Figur 14:** Eksempel på implementering av ulinear forsterkar  $z = g(y)$ .

Den resulterande forma på  $g(y)$  kan målast med oscilloskop og er vist i figur 15.



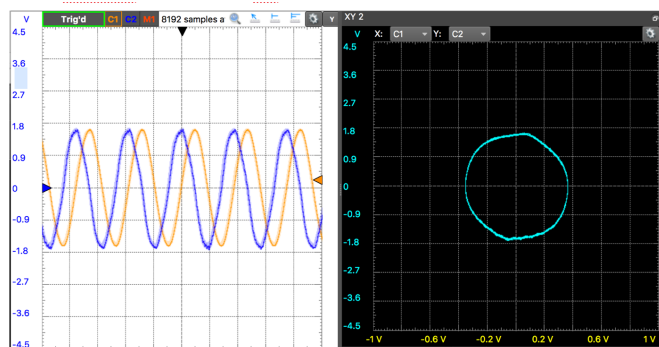
**Figur 15:** Realisert form av ulinearitet  $g(y)$  som vist i figur 14

Stigninga gjennom origo er som sagt gjeven ved verdien på  $R_2$ . Med dei komponentane som er nytta oppfører funksjonen seg lineært opp til i underkant av 0.4 volt, deretter byrjar han flata ut. Me vil forventa at svingningane frå oscillatoren vil ha ein amplitude i same storleiksorden, noko som og kjem fram i oscilloskopbiletet i figur 16.

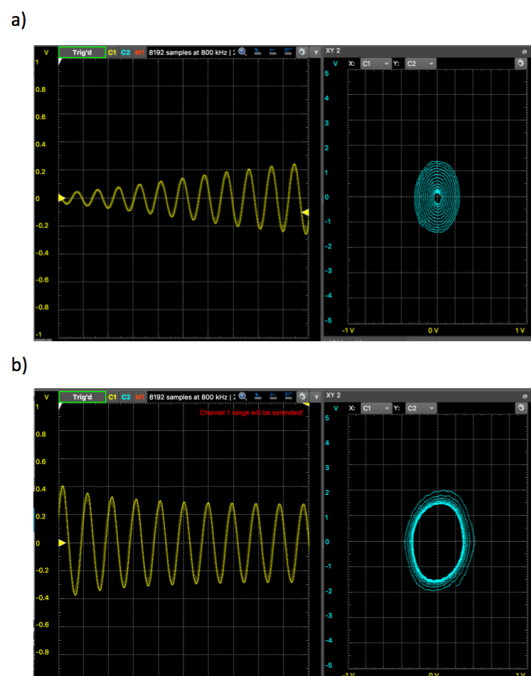
I figuren ser me og fasediagrammet til svingninga. Det er ikkje heilt sirkelforma, noko som er i samsvar med at  $y(t)$  heller ikkje er eit perfekt sinussignal.

Til slutt ser me på eit eksperiment der me har tvinga  $y(t)$  til å ha ein bestemt startverdi før me set oscillatoren i gang. Figur 17 viser resultatet med høvesvis “for stor” startverdi og “for liten” startverdi.





**Figur 16:** Til venstre: Form av  $y(t)$  (gul) og  $\dot{y}(t)$  blå. Til høgre: Fasediagram



**Figur 17:** a) Fasediagram for situasjon med startverdi innanfor grensesyklusen. b) Fasediagram med startverdi utanfor grensesyklusen.

I begge tilfelle spiraliserer svingninga seg inn mot den stabile tilstanden; ei lukka tilnærna sirkelforma sløyfe i fasediagrammet. Dette er nettopp eit døme på ein grensesyklus som nemnt på s. 12. Og ein slik stabil oppførsel er altso avhengig av at systemet kan skildrast med ei *ulinear* differensiallikning. Sjølv om likninga ikkje kan løysast, kan me, som me såg i figur 10 studera eigenskapane til systemet ved fasediagrammet og drøfta verkemåten utifrå kjennskap til ulineariteten, i vårt tilfelle funksjonen  $g$ .

## Referanser

- [1] “ERT-økt 14: Operasjonsforsterkere”, Notat til emne TTT4203 Innføring i analog og digital elektronikk, NTNU, 2020.
- [2] M. C. Ørke: “Andreordens lineære differensialligninger”, Notat til emne TMA4106 Matematikk 2 (for Elsys), NTNU, 2021.
- [3] H. Barkhausen, “Lehrbuch der Elektronen-RÄühere”, 3. Band, “RÄijekkopplung”, Verlag S. Hirzel, 1935.
- [4] L. Lundheim, “Kretsar, system og differensiallikningar”, Notat, NTNU, 2021.
- [5] “ERT-15: Opampens gyldne regler”, Oppgavehefte til emne *TTT4209 Innføring i analog og digital elektronikk*, NTNU, 2020.
- [6] L. Lundheim, “Innføring i analog og digital elektronikk: Eit hjelpehefte”, NTNU, 2020.
- [7] M.C. Ørke: “Ikkelineære systemer”, Notat til emne TMA4111 Matematikk 3 (for Elsys), NTNU, 2021.