

Kapittel 97

Mer om lineære systemer

I dette notatet skal vi studere mer sofistikerte metoder for lineære systemer. Vi skal se på tre viktige transformasjoner - laplacetransform, fouriertransform og konvolusjon. Alle tre kan ved første øyekast fremstå som trukket ut av hatten, men de viser seg å være nyttige verktøy når man skal forstå, analysere og resonnerer rundt lineære systemer, for eksempel elektroniske filter.

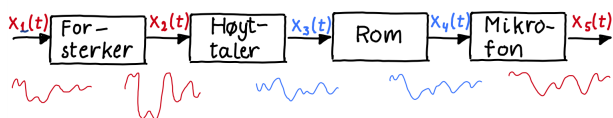
Introduksjon

Systemer og operatorer

I systemteorien undersøker man hvordan ulike systemer samhandler og påvirker hverandre. Et system er "noe" som lar seg påvirke av noen systemer og som i sin tur påvirker andre. Vi kaller gjerne det som påvirker systemet en "inngang" og påvirkningen som systemet har på andre systemer, kaller vi en "utgang".

Påvirkningene modellerer vi som funksjoner av tid, og selve systemet som en operator på et rom av slike funksjoner.

Eksempel 97.1. En forsterker påvirker en høyttaler som i sin tur påvirker luften i et rom slik at der dannes lydbølger, som i sin tur kan påvirke en mikrofon. En slik kjede av systemer som påvirker hverandre gjennom tidsfunksjoner er vist i denne figuren:



Her har vi fire ulike systemer og fem ulike tidsfunksjoner som indikerer en kjede av påvirkninger mellom systemene. Funksjonene x_1 , x_2 og x_5 representerer elektriske signaler, mens x_3 og x_4 uttrykker lufttrykk heholdsvis ved høyttaleren og ved mikrofonen. Δ

Funksjonene i eksemplet over kan betraktes som elementer i et funksjonsrom, for eksempel $C^\infty(\mathbb{R})$, altså rommet av alle glatte (uendelig mange ganger deriverbare funksjoner). Hvert av systemene kan ses på som en operator på dette rommet, altså en "funksjon" $\mathcal{H}$ som tar inn en funksjon $x(t)$ og gir ut en annen funksjon

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}.$$

Eksempler på en slik operatorer er derivasjonsoperatoren D definert ved

$$y(t) = D\{x(t)\} = \dot{x}(t),$$

det ubestemte integralet

$$y(t) = I\{x(t)\} = \int x(t)dx,$$

og høyresiden i en differensiallikning, slik som

$$y(t) = L\{x(t)\} = \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t).$$

Lineære systemer og operatorer

Et system gitt ved operatoren $\mathcal{H}$ sies å være lineært dersom, for alle konstanter a, b vi har at

$$\mathcal{H}\{ax(t) + by(t)\} = a\mathcal{H}\{x(t)\} + \mathcal{H}\{y(t)\}.$$

Selve operatoren kalles da en lineæropoperator. Et eksempel på lineære systemer er slike der utgangen er løsning av en lineær differensiallikning som har høyresiden som inngang.

Tidsinvariante systemer

Et system gitt ved operatoren $\mathcal{H}$ sies å være tidsinvariant dersom følgende gjelder:

Dersom inngangen $x(t)$ gir utgang $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$, vil

$$\mathcal{H}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$$

for alle t_0 .

Et eksempel på tidsinvariante systemer er slike der utgangen er løsningen av en autonom differensiallikning.

Hva betyr dette?

Et eksempel på et tidsinvariant system er en lineær elektronisk krets der alle komponenter har verdier som ikke varierer med tiden.

Men hvordan kan man bruke definisjonen for å avgjøre om et system er tidsinvariant? Det enkleste er å se på et eksempel på et system som ikke er tidsinvariant. La systemet $\mathcal{H}$ være definert ved $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = tx(t)$. Da blir $\mathcal{H}\{x(t - t_0)\} = tx(t - t_0)$ som ikke er det samme som $y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)$.

Sammensatte operatorer

I eksempel 97.1 ovenfor har vi en situasjon hvor utgangen av ett delsystem blir direkte brukt som inngangen til det

neste. Dersom vi, for eksempel representerer forsterkeren med operatoren $\mathcal{H}_1$ og høyttaleren som operatoren $\mathcal{H}_2$ kan vi skrive lydsignalet som

$$x_3(t) = \mathcal{H}_2\{\mathcal{H}_1\{x_1(t)\}\} \quad (97.1)$$

Vi kan nå definere den sammensatte operatoren som det som omformer signalet $x_1(t)$ til $x_2(t)$. Denne nye operatoren betegner vi

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$$

som betyr at først benyttes operatoren $\mathcal{H}_1$, og deretter $\mathcal{H}_2$. Dermed kan (97.1) skrives

$$x_3(t) = \mathcal{H}_{12}\{x_1(t)\}$$

eller

$$x_3(t) = (\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1)\{x_1(t)\}.$$

To nyttige signaloperasjoner

I elektroniske og andre systemer som opererer med tidsfunksjoner er det ofte nyttig å operere på selve argumentet til funksjonen, altså tiden. De to vanligste slike operasjoner er translasjon og dilatasjon.

En translasjonsoperator er "noe" flytter et signal et visst stykke t_0 langs tidsaksen. Den kan defineres ved operatoren $\mathcal{T}_{t_0}$ slik:

$$\mathcal{T}_{t_0}\{x(t)\} = x(t - t_0).$$

Når t_0 er en positiv størrelse, vil signalet bli forsinket i vanlig forstand. I teorien er det også mulig å bruke negativ t_0 , noe som tilsvarer en fremskynding av signalet.

De fleste vinylplater skal avspilles med en hastighet på 33 omdreininger per minutt. Men det finnes også plater innspilt med 45 omdreininger per minutt. Dersom du spiller av platen på feil hastighet får du et signal som om tiden går hurtigere eller saktere enn normalt. Dette er et eksempel på tids-dilatasjon og kan matematisk beskrives ved dilatasjonsoperatoren $\mathcal{D}_a$ definert ved

$$\mathcal{D}_a\{x(t)\} = x(at).$$

Konkrete eksempler på translasjon og dilatasjon er vist i eksempel 97.2 nedenfor.

Du har sikkert lært at operasjonen $+$ er kommutativ, det vil si at $a + b = b + a$. Matrisemultiplikasjon er et eksempel på en operasjon som ikke er kommutativ, det vil si at det ikke alltid er slik at $AB = BA$. For sammensetningsoperatoren $\circ$ gjelder noe lignende. For noen operatører $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er det slik at $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, for andre er det ikke slik. De to operatorene $\mathcal{T}_t$ og $\mathcal{D}_a$ er generelt ikke kommutative. Hvordan ser du det?

Eksempel 97.2. La x være funksjonen

$$x(t) = e^{-x^2} \cos(2\pi t)$$

som illustrert i figur 97.1 a). Her ser vi

$$\mathcal{T}_3\{x(t)\} = x(t - 3)$$

i figur 97.1 c) og

$$\mathcal{D}_2\{x(t)\} = x(t/2)$$

i figur 97.1 b). Figur 97.1 d) viser enten

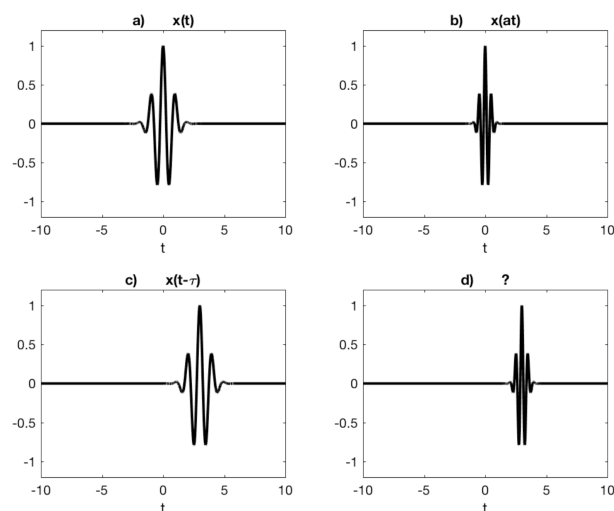
$$\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{D}_2$$

eller

$$\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{T}_3.$$

Hva er riktig?

△



Figur 97.1:

- a) Signalet
- b) Dilatasjon
- c) Translasjon
- d) Hva er dette?

Integraltransformer

Innen elektronikk og signalbehandling trengs verktøy for å analysere eksisterende systemer og å designe nye. Mange av disse verktøyene er matematiske. Vi har tidligere sett på to viktige "verktøykasser", nemlig lineæralgebra og differensialligninger. I dette kapitlet ser vi på et annet sett av matematiske strukturer, nemlig det som kalles integraltransformer. Disse er sentrale for å kunne utføre presise resonnerment om lineære system og å tolke hvordan slike vil påvirke hverandre.

Vi så at elektroniske systemer kan betraktes som operatører som tar inn en funksjon av t og gir ut en annen. Vi skal nå se på en annen type operator, nemlig det som kalles en transform. Denne har også en tidsfunksjon $x(t)$ som argument, men gir ut en funksjon av en annen variabel, som vi ofte kaller s . Dersom vi kaller selve transformen $\mathcal{T}$, kan dette skrives

$$X(s) = \mathcal{T}\{x(t)\}.$$

Vi bruker her konvensjonen at tidsfunksjonen skrives med liten bokstav x og den tilsvarende transformerte funksjonen med stor X .

En integraltransform er en transform der selve "transformasjonsmekanismen" kan uttrykkes ved et integral:

$$X(s) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \int_I x(t)K(t,s)dt.$$

Her har vi innført to nye symboler. I står for det intervallet, eller området av $\mathbb{R}$ som integrasjonen tas over, mens

$K(t, s)$ er en bestemt funksjon av to variable som kalles kjernen til transformen. Vi har her uendelig mange mulige valg for I og $K(t, s)$ som kan gi opphav til (mer eller mindre nyttige) transformerte, se her. I tillegg vil vi kunne ha ulike varianter av samme transform utfra om s er reell, kompleks eller rent imaginær.

La oss begynne med noen grunnleggende ting som gjelder for alle integraltransformer. Her er noe vi må ta stilling til før vi i det hele tatt kan komme i gang.

Har du kjøpt billett til integraltransformtoget?

Du kan ikke putte hva som helst inn i en integraltransform. Integralet må være definert og konvergere.

Eksempel 97.3. La x være funksjonen

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Vi kan ikke transformere denne funksjonen for den er ikke riemannintegrerbar. Δ

Dette eksemplet er litt patologisk, men man må være forsiktig så man ikke transformerer noe som ikke kan transformeres. Nøyaktig hva som kan transformeres er litt forskjellig fra transform til transform.

Eksempel 97.4. Mellintransformen er gitt ved

$$X(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} x(t) dt.$$

Vi kan ikke transformere funksjonen $x(t) = 1$, for integralet

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} dt.$$

konvergerer ikke for noen verdier av s . Δ

Eksempel 97.5. Den ensidige laplacetransformen er gitt ved

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt.$$

La oss for enkelhets skyld anta at s er reell. Dersom vi krever at $s > 0$, går det fint å transformere funksjonen $x(t) = 1$, siden

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Δ

Den neste regelen er helt sentral, og i forbindelse med lineære system kommer vi til å bruke den så mye at vi slutter å tenke på den.

Integraltransformer er lineæroperatører

Dersom a og b er tall og f og g funksjoner, er

$$\mathcal{T}\{ax + by\} = a\mathcal{T}\{x\} + b\mathcal{T}\{y\}.$$

Dersom to funksjoner har samme integraltransform, må de da være like som funksjoner? Slik du har lært funksjoner til nå, er svaret definitivt nei.

Eksempel 97.6. La $x(t)$ være en funksjon, og

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

og anta at intervallet til transformen $\mathcal{T}$ inneholder punktet $t = 1$. Det er klart at at x og y (som er forskjellige) må ha den samme transformen, siden den ene verdien som skiller dem ikke påvirker integralet. Δ

Dette eksemplet er også litt patologisk, men det er et viktig poeng at et integral ikke endres av at man bytter ut enkelte funksjonsverdier. En strategi for å omgå dette problemet er å omdefinere hva man mener med at to funksjoner er like; i avansert matematisk analyse bryr man seg ikke så mye om at funksjoner har forskjellige funksjonsverdier i et og annet punkt, og da blir det lettere å snakke om invers integraltransform. Dette må egentlig baseres på en mer avansert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue i 1902. Dette er for komplisert for oss, men det er ikke egentlig så viktig for en ingeniør. Ingeniører bruker integraltransform til å analysere lineære systemer, og da vil det gjerne være åpenbart fra anvendelsen hva den inverstransformerte er, selv om det ikke nødvendigvis finnes noe matematisk entydig valg.

Vi kan altså ikke forvente at det skal finnes en entydig invers. Men det finnes ofte en formel for inverstransformasjon allikevel, som kan brukes med vett. Av og til er de for kompliserte til å gjøre nytte for seg. Da bruker vi tabell for å finne den inverse transformen, eller leser av informasjon om systemet rett fra transformen uten å invertere.

Inverstransform

Det finnes som regel en formel for å transformere tilbake.

Eksempel 97.7. Fouriertransformen er gitt ved

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Det går an å vise at inverstransformen er

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (97.2)$$

Et formelt bevis for dette krever matematikk som går langt ut over dette kurset, men nedenfor gir vi en litt løsere argumentasjonsrekke som underbygger resultatet. Δ

Konvolusjon

En binær operator er “noe” som gjør noe med to elementer i en mengde slik at vi får et nytt element. Kjente eksempler fra tallmengder er “vanlig” addisjon og multiplikasjon. Dette generaliserer vi enkelt til reelle funksjoner, slik at vi kan få en ny funksjon ved å addere resultatet av to andre. Vi kan altså danne oss funksjonen $x(t)$ ut fra to andre funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ ved

$$z(t) = x(t) + y(t).$$

Tilsvarende kan vi gjøre med multiplikasjon.

Vi skal nå se på en type binære operator på rommet av integrerbare funksjoner som ikke er generaliseringen av en "kjent" operator på tall. Dette er konvolusjonsoperatoren. Ved hjelp av denne kan vi danne oss en funksjon $z(t)$ ut fra to andre funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ ved

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)y(t - \theta) d\theta. \quad (97.3)$$

Vi presiserer altså at symbolet $*$ ikke står for multiplikasjon, og resultatet av operatoren er ikke et tall men en ny funksjon. Det finnes forskjellige typer konvolusjoner, og det er stort sett integrasjonsgrensene som skiller dem. Hvilken type integrasjonsgrenser som er mest relevant, kommer litt an på anvendelsen, men vi begynner altså med den her.

Viktig regel

Det er lett å vise at konvolusjonsoperatoren er kommutativ, altså at

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

Konvolusjon er en litt merkelig operasjon som dukker opp her og der, og er i seg selv en integraltransform. Mange artige ting er basert på konvolusjon. Noen eksempler er reverb-knappen på gitarforsterkeren din, bakgrunnsuskarpheten i det konfirmasjonsbildet ditt, eller autofokus-funksjonen på speilreflekskameraet du fikk til ovennevnte konfirmasjon. Sannsynlighetstettheten til summen av to stokastiske variable er konvolusjonen mellom tetthetene til hver variabel.

Det tar alltid litt tid å fordøye konvolusjonsoperatoren. Her er to illustrerende eksempler.

Eksempel 97.8. Anta at vi har funksjonene

$$x(t) = u(t)e^{-t}$$

og

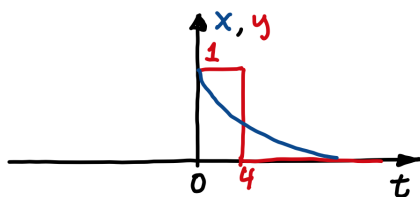
$$y(t) = u(t) - u(t - 4)$$

hvor $u(t)$ er heavisidefunksjonen definert ved

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Det vil si at $x(t)$ er null for negative t og eksponensielt avtagende for $t > 0$, og $y(t)$ er en firkantpuls av lengde 4 som starter i $t = 0$. Begge funksjonene er vist i figur 97.2.

△



Figur 97.2: To funksjoner $x(t)$ (svart) og $y(t)$ (rød).

Eksempel 97.9. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y , med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$. Hva er sannsynlighetstettheten til $X + Y$?

Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z - v$, tar $X + Y$ verdien z . For å finne sannsynligheten

$$P(X + Y = z)$$

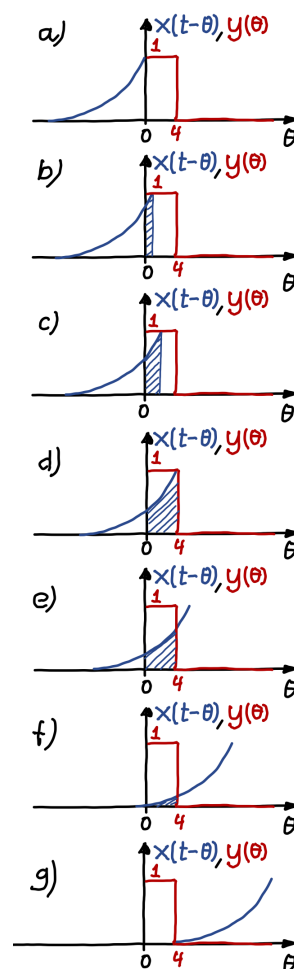
må vi derfor summere opp bidraget fra alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z - v)$, slik at sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X + Y$ blir

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z - v) dv. \quad \Delta$$

Konvolusjonen vi skal studere er altså integralet

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) * y(t) = y(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)x(t - \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)e^{-(t-\theta)} d\theta \end{aligned}$$

For å forstå hva konvolusjonsoperatoren "gjør" må vi se nærmere på selve integralet. Det er da viktig å merke seg hva som er integrasjonsvariabelen, nemlig θ . Den "egentlige" tidsvariabelen t kan nå regnes som en konstant innenfor integraltegnet, og angir en traselasjon av funksjonen $x(\theta)$ langs θ -aksen. Dette har vi prøvd illustrert i figur 97.3.



Figur 97.3: Illustrasjon av konvolusjonsintegralet (skravert) for ulike verdier av t .

Figur 97.3 a) illustrerer situasjonen for $t = 0$. $y(\theta)$ ser nøyaktig likedan ut som i figur 97.2. Men $x(t - \theta)$ har blitt speilet om vertikalaksen siden det er kommet et minustegn foran θ . Siden $t = 0$ er det altså $x(-\theta)$ som

er tegnet. Og her har vi opphavet til ordet "konvolusjon". Det betyr "bretting" eller "foldning". På samme måte som en konvolutt er "brettet" rundt et brev. På norsk er også "folding" ofte brukt i stedet for "konvolusjon".

Hva skjer så videre i integralet? Jo, vi tar produktet av de to funksjonene. I situasjonen $t = 0$ blir dette produktet null, siden minst en av funksjonene er null for hvert punkt på θ -aksen.

I Figur 97.3 b) har vi satt $t = 1$. Da har vi et overlapp av områder hvor begge funksjonene er forskjellig fra null, og vi får et integral indikert ved det skarverte området. Videre i figur 97.3 c-g) ser vi hvordan overlappet og integralet varierer ettersom t øker.

Så det konvolusjonen "gjør" er altså for hver eneste verdi av t :

1. "brette" funksjonen $x(\theta)$ om vertikalaksen
2. translere den distansen t langs θ -aksen
3. multiplisere med $y(\theta)$
4. integrerer resultatet fra $-\infty$ til ∞ .

Når vi nå har sett på dette grafisk, la oss finne matematisk hvordan den resulterende funksjonen $z(t) = x(t) * y(t)$ blir.

Vi ser først på tilfellet $t < 0$. Da får vi (enda tydeligere enn i figur 97.3 a) at det ikke noe overlapp mellom funksjonene, og integralet blir lik 0, altså

$$z(t) = x(t) * y(t) = 0$$

Videre, for $0 < t < 4$ har vi en situasjon hvor funksjonene overlapper i intervallet $\theta \in (0, t)$ (se figur 97.3 b-d). Her er $y(\theta) = 1$ og vi får

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^t x(\theta) \cdot 1; d\theta = \int_0^t e^{t-\theta} \cdot 1; d\theta = 1 - e^{-t}.$$

(Sjekk at du er med på denne utregningen. Her er det virkelig viktig å holde orden på hva som er integrasjonsvariabel og ikke.)

Til slutt har vi tilfellet $t > 4$ (figur 97.3 e-g.) Da er overlappingsområdet $\theta \in (0, 4)$ og integrasjonsgrensene tilsvarende, altså:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^4 e^{t-\theta} \cdot 1; d\theta = e^{-t} (e^{-4} - 1).$$

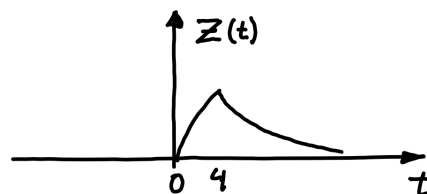
Det komplette uttrykket for $z(t)$ blir altså

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{for } 0 < t < 4 \\ e^{-t} (e^{-4} - 1) & \text{for } t > 4, \end{cases}$$

og vi har skissert formen i figur 97.4.

Fouriertransform

Dette er noe som har en spesiell plass i elektroingeniørens hjerte.



Figur 97.4: Konvolusjonen $z(t) = x(t) * y(t)$

Fouriertransform

Fouriertransformen til f er

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (97.4)$$

der ω er en reell variabel.

Siden

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele t -aksen. Det er vanlig å kreve at x er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (97.5)$$

Det er mulig å slakke noe på dette kravet, med det skal ikke vi gjøre.

Inngangsbillett til fouriertansform

Dersom x er absolutt integrerbar, konvergerer integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt.$$

absolutt.

I beviset får vi bruk for at funksjonen $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ er en parametrisering av enhetssirkelen, med $|e^{-i\omega t}| = 1$ for alle ω og t .

Bevis. Dersom ω og x er reelle, er $|e^{-i\omega t}| = 1$, slik at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-i\omega t}| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Vi har tilgang på en formel for den inverse transformen, men her trengs strengere krav på regulariteten til signalet.

Invers fouriertransform

Dersom $x(\omega)$ er glatt og alle deriverte synker raskt nok når $t \rightarrow \infty$, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (97.6)$$

Hva betyr det at alle deriverte synker raskt nok når $t \rightarrow \infty$? Det er vanlig å kreve at

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^k \left| \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right| < \infty$$

for alle k og n , for da er det ikke så vanskelig å bevise at inversformelen gjelder (det er fremdeles litt for vanskelig for oss). Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på den ovennevnte integrasjonsteorien oppfunnet av Lebesgue. Vi skal fouriertransformere funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet, så vi får bare lukke øynene og håpe at det går bra. Men det går allikevel an å få en ide om hvorfor inversformelen er som den er ved å ta en titt tilbake på fourierrekker.

Fourierrekker

La

$$x : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$$

være en funksjon.
Vi definerer f sin fourierrekke som

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

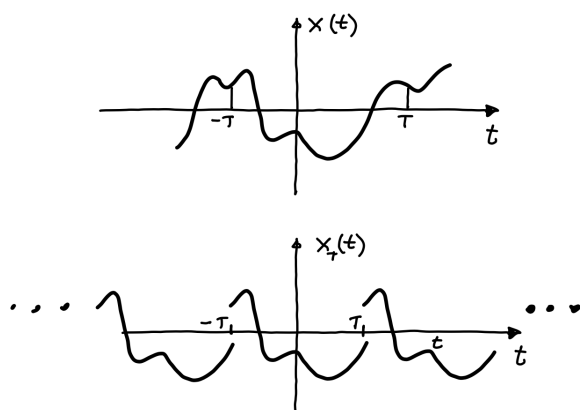
der

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi i n t / T} dt,$$

og skriver

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}.$$

Fouriertransformen er en slags fourierrekke der $[-T/2, T/2]$ strekkes til å bli hele t -aksen. La $x(t)$ være en reell eller kompleks absolutt integrerbar funksjon av $t \in \mathbb{R}$. La oss først se på funksjonen i det endelige intervallet $(-T/2, T/2)$. La $x_T(t)$ betegne den periodiske utvidelsen skissert i figur 97.5.



Figur 97.5: Funksjon $x(t)$ på $\mathbb{R}$ med periodisk utvidelse $x_T(t)$

Denne vet vi har en fourierrekke gitt ved

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Delta\omega t}$$

hvor vi har definert $\Delta\omega = 2\pi/T$ og fourierkoeffisientene

er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\Delta\omega t} dt.$$

Ved å definere funksjonen

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

kan vi skrive

$$c_n = \frac{1}{T} X_T(n\Delta\omega),$$

og vi får

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(n\Delta\omega) e^{in\Delta\omega t}. \quad (97.7)$$

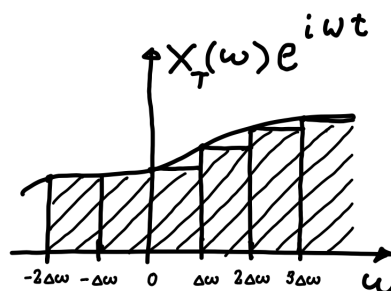
La oss tenke oss at vi kan gjøre T så stor vi vil. Når T øker, får vi altså med oss en større og større del av t -aksen. Dersom vi ikke bryr oss om det som er utenfor intervallet $(-T/2, T/2)$, kan vi da litt upresist si at $x_T(t) \rightarrow x(t)$ når $T \rightarrow \infty$. Tilsvarende vil $X_T(\omega) \rightarrow X(\omega)$ når $T \rightarrow \infty$, hvor vi har definert

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

som nettopp er fouriertransformen til $x(t)$. Dersom vi multipliserer og dividerer med $\Delta\omega$ i (97.7) kan vi skrive

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(n\Delta\omega) e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega. \quad (97.8)$$

Summen i (97.8) kan nå ses på som det skraverte arealet i figur 97.6



Figur 97.6: Illustrasjon av riemannsum i (97.8)

Dette har form som en riemannsum. Når $T \rightarrow \infty$ får vi at $\Delta\omega \rightarrow 0$, og summen går over til et integral. Samtidig har vi at $T\Delta\omega = 2\pi$ slik at (97.8) går over til

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (97.9)$$

som er uttrykket for den inverse fouriertransformen.

Det er ikke særlig praktisk å utføre integralene (97.4) eller (97.6) hver gang man har bruk for å utføre en fouriertransform eller den inverse. Derfor er det utarbeidet tabeller over fouriertransformen til vanlig forekommende fouriertransformer som en kan slå opp i.

Hva betyr dette?

På samme måte som at en fourierrekke uttrykker et periodisk signal som en sum av frekvenskomponenter, viser (97.9) at dette også kan gjøres for "alle" signaler, enten de er periodiske eller ikke. Det at summen går over til et integral, betyr bare at frekvenskomponentene ligger uendelig tett. Tar vi absoluttverdien til fouriertransformen, viser $|X(\omega)|$ "hvor mye" av frekvensen ω som er til stede i signalet $x(t)$. Dette forutsetter naturligvis at signalet $x(t)$ har en fouriertransform, men som nevnt tidligere er de aller fleste signaler av ingeniørmessig interesse fouriertransformerbare.

Fouriertransformen til et signal omtales ofte som signalets spektrum. Størrelsene $|X(\omega)|$ og $\angle X(\omega)$ kalles tilsvarende amplitudespektrum og fasespektrum.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}(e^{-a|t|}) \\ &= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= \frac{a}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{-t(a+i\omega)} dt + \int_{-\infty}^0 e^{t(a-i\omega)} dt \right) \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) \\ &= \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \end{aligned} \quad (97.11)$$

Δ

Det første vi merker oss ved $X(\omega)$ er at den er reell. Det er ikke vanlig. For de fleste funksjoner vil den fouriertransformerte være kompleks-valuert. Det kan vises (prøv, det er ikke vanskelig) at $X(\omega)$ alltid blir reell når $x(t)$ er en like funksjon. Videre ser vi i figur 97.7 a) og c) at når jo større a er, jo smalere blir grafen til $x(t)$. Dette samsvarer med at $x(t)$ slik den er definert kan skrives

$$x(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t|} \quad (97.10)$$

$$x(t) = \mathcal{D}_a \{e^{-|t|}\}$$

som altså tilsvarer en skalering av tidsaksen.

Samtidig ser vi fra figur 97.7 b) og d) at det omvendte gjelder for fouriertansformen; den blir bredere jo større a er. Ser vi på uttrykket for $X(\omega)$ finner vi at denne også kan skrives som en dilatasjon, men denne gangen med $1/a$

$$X(\omega) = \mathcal{D}_{1/a} \left\{ \frac{1}{1 - \omega^2} \right\}.$$

Dette resultatet er ikke spesielt for den valgte funksjonen, men noe som kan formuleres som en regel som alltid gjelder for en vilkårlig funksjon:

Dilatasjonsregelen

Dersom funksjonen $x(t)$ har fouriertransform $X(\omega)$, gjelder

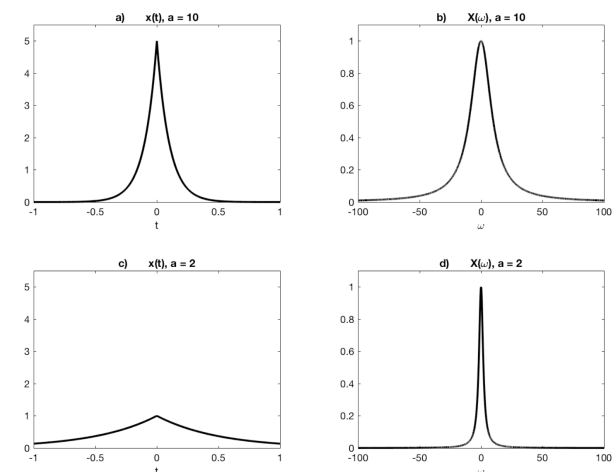
$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Hva betyr dette?

En litt uformell tolking av dilatasjonsregelen kan formuleres som at dersom du gjør noe smalere i tidsdomenet, blir det bredere i frekvensdomenet. Eller: korte pulser har høy båndbredde. Dette vet alle som stiller med signalbehandling: Dersom man skal overføre mye informasjon, bruker man korte pulser, og da trengs større frekvensspekter for å overføre dem.

Eksempel 97.10. Vi vil se på funksjonen

der $a > 0$. I figur 97.7 a) og c) ser vi to varianter av funksjonen med henholdsvis "stor" ($a = 10$) og "liten" ($a = 2$) verdi av konstanten a .



Figur 97.7: Funksjonen $x(t)$ fra (97.10) og den fouriertransformerte $X(\omega)$ for ulike verdier av a .

$x(t)$ avtar raskt både for store positive og store negative verdier av t , så det er lett å vise at betingelsen (97.5) er oppfylt slik at den har en fouriertransform. Denne kan da beregnes slik:

Transformpar

De to funksjonene $x(t)$ og $X(\omega)$ fra (97.10) og (97.11) danner det vi kaller et transformpar, det vil si to funksjoner der vi kan gå fra den ene til den andre ved fourier- eller invers fouriertransform. Vi skriver dette slik:

$$\frac{a}{2}e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

Men det er mer å lære av eksempel 97.10. Dersom vi ser på figur 97.7 igjen, ser vi at når funksjonen blir bredere i tid, er høyden mindre. Man kan kanskje visuelt se at arealet under grafen er ganske likt i de to figurene. Det er faktisk lett å vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2}e^{-a|t|}dt = 1, \quad (97.12)$$

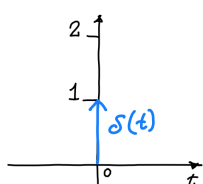
altså uavhengig av a .

La oss så se på den fouriertransformerte $X(\omega)$. Fra figur 97.7 ser vi at denne har maksimum for $X(0) = 1$. Vi ser også at “humpen” rundt $t = 0$ blir bredere ettersom a øker. Faktisk, og dette ser du lett, vil $X(\omega) \rightarrow 1$ for alle verdier av ω når $a \rightarrow \infty$.

Tilbake til $x(t)$. Vi ser altså at den både blir smalere med økende a og høyere. Disse to tendensene kompenserer hverandre slik at integralet (97.12) blir 1 for alle verdier av a . Men merk at når $a \rightarrow \infty$, vil $x(t) \rightarrow 0$ for alle $t \neq 0$. I grensen får vi det som kalles delta-pulsen eller Dirac-pulsen¹ som betegnes $\delta(t)$.

Mer om deltapulsen

Vi introduserte deltapulsen som et slags grenseverdi til funksjonen $x(t)$ i (97.10) når $a \rightarrow \infty$. Da hadde vi at $x(t) \rightarrow \infty$ for $t = 0$ og $x(t) \rightarrow 0$ for alle andre verdier av t . Denne oppførselen gjør at vi ofte symboliserer deltapulsen med en pil som vist figur 97.8.



Figur 97.8: Grafisk fremstilling av delta-pulsen plassert i $t = 0$. Høyden på pilen angir integralet, som er lik 1.

Et resultat av dette er at

$$\int_a^b \delta(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{når } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

hvis og bare hvis $0 \in (a, b)$. Det vil si at dersom $t = 0$ er inneholdt i integrasjonsområdet er integralet lik 1, ellers er det null. Derfor kan deltapulsen brukes til å “plukke ut” verdien til en funksjon i punktet $t = 0$ ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0).$$

¹Enkelte bruker ordet “delta-funksjonen”, men vi unngår å bruke dette ordet, da $\delta(t)$ ikke er definert for $t = 0$ og således ikke egentlig er noen veldefinert funksjon for denne verdien av t .

(Her kunne vi også ha brukt andre integrasjonsgrenser, så lenge $t = 0$ er med i integrasjonsområdet.) Tilsvarende gjelder dersom vi translterer delta-pulsen. Då får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0). \quad (97.13)$$

Den umiddelbare nytten av et slikt resultat kan være vanskelig å få øye på, men vi skal snart se at denne “plukke-ut-egenskapen” er nøkkelen til hvorfor impulsresponsen til et system er så viktig.

Impulsresponsen

Mange systemer (for eksempel elektroniske eller mekaniske) kan modelleres som lineære og tidsinvariante. Det vil si at utgangen $y(t)$ av systemet er løsningen av en lineær, autonom differensialligning med konstante koeffisienter som har inngangen (påtrykket) $x(t)$ på høyre side av likhetstegnet. Løsningen av en slik differensialligning kan som kjent skrives

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t).$$

Her er $y_h(t)$ en løsning av den homogene ligningen, og er således uavhengig av påtrykket $x(t)$, mens $y_p(t)$, den partikulære løsningen. I mange praktiske situasjoner, går vi ut ifra at den homogene løsningen er lik null, det vil si at vi bare er interessert i den partikulære løsningen.

Det skal snart vise seg at det i en slik situasjon er spesielt interessant så se på utgangen av systemet når inngangen er en delta-puls, altså $x(t) = \delta(t)$. Formen på utgangen i dette tilfellet kalles systemets impulsrespons og er så viktig at den har fått et eget symbol $h(t)$ og er altså gitt ved

$$h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}.$$

Vi skal ikke for øyeblikket bry oss så mye om hvordan man finner denne funksjonen, men bare anta at vi kjenner den. Grunnen til at den er så viktig kommer nå.

La oss tenke oss at vi har et vilkårlig signal $x(t)$ på inngangen. Vi kan da skrive

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}.$$

Nå bruker vi “plukke-ut”-egenskapen til deltapulsen og får

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t - \theta)d\theta\right\}.$$

Nå er både $\mathcal{H}$ og integralet lineære operatorer. Dersom vi i tillegg antar at de er kommutative (Morten: sjekk) kan vi flytte $\mathcal{H}$ innenfor integralet og får:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{x(\theta)\delta(t - \theta)\}d\theta.$$

For en bestemt verdi av θ , kan denne betraktes som en konstant, og siden $\mathcal{H}$ er lineær, kan vi trekke denne ut slik:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\mathcal{H}\{\delta(t - \theta)\}d\theta.$$

Til slutt bruker vi antagelsen om at systemet er tidsinvariant. Siden $h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$ gir det

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t - \theta)d\theta.$$

Sammenligner vi dette med definisjonen av konvolusjon (97.3), ser vi at

$$y(t) = x(t) * h(t), \quad (97.14)$$

altså at utgangen av det lineære systemet er gitt som konvolusjonen av inngangen med impulsresponsen av systemet.

Hva betyr dette?

Det teoretiske resultatet vi nettopp har sett på har viktige praktiske konsekvenser. Mange fysiske systemer, så som et elektronisk filter, en konsertsal eller radiobølger som brer seg i rommet, kan modelleres som et tidsinvariant lineært system. Det vil si at det finnes en lineær differensialligning med konstante koeffisienter som beskriver systemets oppførsel. Resultatet (97.14) sier at dersom vi kjenner impulsresponsen, trenger vi verken kjenne differensialligningen eller løse den. Men, vi må være i stand til å utføre et konvolusjonsintegral. Det siste er fint mulig med numeriske metoder. Hva med impulresponsen $h(t)$? Den kan estimeres (måles) direkte eller indirekte. En direkte måte er å påføre systemet en meget kort, kraftig puls, som en tilnærming til delta-pulsen $\delta(t)$ og måle resultatet. Indirekte metoder kommer vi snart tilbake til.

Et fundamentalt resultat

Som vi nettopp har sett, er konvolusjon et viktig begrep når vi har å gjøre med lineære tidsinvariante systemer. En ulempe med konvolusjon sammenlignet med mange andre operatører, er at selve integralet som inngår i definisjonen er litt uryddig. En grunn til at fourier- (og laplace-) transformen er så nyttig, er følgende transformpar:

Konvolusjonsteoremet

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)Y(\omega),$$

eller på norsk: "Konvolusjon i tidsdomenet tilsvarer multiplikasjon i frekvensdomenet."

Bevis. Vi bruker variabelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v) dv e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v) e^{-i\omega t} dv dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} \mathcal{F}\{x\} du \\ &= \mathcal{F}\{x\} \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} du \\ &= \mathcal{F}\{x\} \mathcal{F}\{y\} = X(\omega)Y(\omega) \end{aligned}$$

□ hvor $\{c_n\}$ er fourierkoeffisientene til funksjonen.

Hva betyr dette?

Konvolusjonsteorets betydning blir spesielt viktig når vi ser det i sammenheng med impulsresponsens rolle. Fra (97.14) har vi at utgangen av et system med inngang $x(t)$ og impulsrespons $h(t)$ er gitt ved $y(t) = h(t) * x(t)$. Konvolusjonsteoremet sier da at spekteret til utgangssignalet er gitt ved

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

hvor $X(\omega)$ er inngangssignalets spektrum. Uttrykket $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ er det som vi straks skal definere som systemets frekvensrespons.

En viktig generalisering

Da vi innførte fouriertransformen for en generell funksjon $x(t)$, satte vi som krav at $x(t)$ måtte være absolutt integrerbar. Ikke alle funksjoner som vi er interessert i er absolutt integrerbar, men det er faktisk meningsfullt å bruke fouriertransformen på noen av dem likevel. En funksjon som stadig dukker opp i elektroteknikken er den komplekse eksponentialfunksjonen

$$x(t) = e^{i\omega_0 t},$$

og det er ikke så vanskelig å se at kravet () ikke er oppfylt for denne. Likevel vil vi definere fouriertransformen for $x(t)$, og for å vise at det stemmer, går vi en omvei. Vi starter med å påstå at

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (97.15)$$

Oppgave: Vis at

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega - \omega_0)\} = e^{i\omega_0 t}.$$

Hvilke andre typer funksjoner har vi som ikke er absolutt integrerbare? Jo, for eksempel alle periodiske funksjoner. Men disse kan skrives som en fourierrekke, og da kan vi benytte (97.15) på hvert av leddene i rekken, slik at vi for en periodisk funksjon $x(t)$ får en fouriertransformert på formen

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - \omega_n)$$

Hva betyr dette?

I elektroteknikken er frekvensresponsen $H(\omega)$ til et system et kompleks tall som forteller hvordan utgangen $y(t)$ til systemet blir når inngangen er på formen

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

For denne bestemte typen inngangssignal, blir da utgangen lik

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}. \quad (97.16)$$

For et system sammensatt av lineære kretselement, kan $H(\omega)$ finnes ved hjelp av Kirchhoffs lover og impedansene i kretsen. Ved hjelp av konvolusjonsteoremet har vi nå en annen måte å finne frekvensresponsen på ved uttrykket $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. Dersom man for eksempel har målt impulsresponsen $h(t)$ til et ukjent system, kan altså frekvensresponsen finnes ved en fouriertransform. Og omvendt: Dersom man har målt frekvensresponsen, for eksempel med en bodeanalysator, kan impulsresponsen finnes ved inners fouriertransform.

Oppgave: Gitt et system med impulsrespons $h(t)$. Vis at utgangen er gitt ved (97.16) når inngangen er

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Derivasjonsregelen

Dersom $x(\omega)$ er glatt og alle deriverte synker raskt nok når $t \rightarrow \infty$, er

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = i\omega\mathcal{F}\{x\}$$

Bevis. Dette fikser vi med en liten delvisintegrasjon. Husk at $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ siden x er absolutt konvergent.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega\mathcal{F}(x) \end{aligned} \quad \square$$

Eksempel 97.11. Vi beregner

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt$$

Det er litt jobb. Derivasjonsregelen over gir

$$\mathcal{F}(-2te^{-t^2}) = i\omega\mathcal{F}(e^{-t^2}).$$

Men vi kan også observere at

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-2te^{-t^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -2te^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ite^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt \\ &= -2i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}). \end{aligned}$$

Vi mangler litt vanskelig teori for å være helt sikker på den siste beregningen, men vi lar den passere allikevel. Hvis vi setter disse uttrykkene lik hverandre, får vi differensiallikningen

$$i\omega\mathcal{F}(e^{-t^2}) = -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2})$$

eller

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}) + \frac{\omega}{2} \mathcal{F}(e^{-t^2}) = 0$$

for $\mathcal{F}(e^{-t^2})$. Integrerende faktor er

$$e^{\omega^2/4},$$

slik at

$$\frac{d}{d\omega} (e^{\omega^2/4} \mathcal{F}(e^{-t^2})) = 0$$

eller

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = C e^{-\omega^2/4}.$$

Senere i semesteret skal vi se at

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

som gir

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}.$$

Dersom $a > 0$, kan vi gjøre den samme beregningen og få

$$\mathcal{F}(e^{-at^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}. \quad \triangle$$

Flere regneregler

Tidsskift

$$\mathcal{F}\{x(t - \theta)\} = e^{-i\omega\theta} X(\omega)$$

Frekvensskift

$$\mathcal{F}\{e^{i\theta t} x(t)\} = X(\omega - \theta)$$

Tidsskalering

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Bevis. Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x-v) dv e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(x-v) e^{-i\omega t} dv dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u} \mathcal{F}(f) du \\
 &= \mathcal{F}(f) \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega u} du \\
 &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)
 \end{aligned}$$

□

Laplacestransform

Det fins to viktige transformere som begge går under navnet laplacestransform. Forskjellen på de to er integrasjonsområdet I . Den tosidige laplacestransformen er definert ved

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Her er $s = \sigma + \omega i$, og dette er en generalisering av fouriertransform, med litt andre bruksområder. Fouriertransformen har samme integrasjonsområde som den tosidige laplacestransformen, men kjernen er altså litt forskjellig.

Tilsvarende er den ensidige laplacestransformen gitt ved

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

I begge tilfeller er altså transformens kjerne gitt ved $K(t, s) = e^{-st}$, men integrasjonsområdet er forskjellig. Litt avhengig av hva transformen skal brukes til, kan variabelen s regnes som et komplekst eller reelt tall.

Oppgaver

1. Vis at $\mathcal{T}_\tau$ og $\mathcal{D}_a$ ikke er generelt kommutative.
2. Vis at konvolusjonsoperatoren er kommutativ.