TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

Trippelintegral

Trippelintegral fungerer omtrent som dobbeltintegral, men det er vanskeligere. Vi integrerer funksjoner fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. Du kan tenke på funksjonen som massetetthet i rom, og på integrasjonsområdet som en ting du ønsker å finne massen til. Vi skriver

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dV = \int\int\int f(x,y,z)\, dzdydx$$

og integralene utføres fra innerst til ytterst.

$\boxed{1}$ Les kap. 14.5 i Adams.

La oss begynne med noe enkelt. I oppgaven under er integrasjonsområdet en rektangulær boks.

$\boxed{2}$ Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x^2y + z\, dzdydx.$$

$\boxed{3}$ Dersom $x+y+z$ er massetetthet, hvordan vil du tolke det innerste integralet

$$\int_0^3 x^2y + z\, dz?$$

Hva med de to innerste integralene

$$\int_0^2 \int_0^3 x^2y + z\, dzdy?$$

Det vanskelige kommer når integrasjonsområdet ikke er rektangulært. La oss prøve Adams sitt eksempel med tetraederformet integrasjonsområde. I de tre neste oppgavene er T et tetraeder med hjørner i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$.

$\boxed{4}$ Overflaten til T består av fire plan som har hver sin likning. Finn dem.

$\boxed{5}$ Skriv opp integralet

$$\iiint_T x^2y + z\, dV$$

på seks forskjellige måter.

$\boxed{6}$ Anta at massetettheten til et objekt formet som T er gitt som $\delta(x,y,z) = xz$. Finn massen og massesenteret til objektet.

Nå tar vi en litt vanskeligere en.

$\boxed{7}$ Et område D er definert ved gitt ved ulikhetene $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$. Skisser området og skriv opp

$$\iiint_D x^2y + z\, dV$$

på seks forskjellige måter. (Oppg 14.5.7 fra Adams.)