Trippelltintegral

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene D som er enhetskuleformet, blir det et svineri uten like i vanlige koordinater:

$$\iiint_D f\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2-x^2}}^{\sqrt{1-y^2-x^2}} f(x,y,z)\;dzdydx$$

Heldigvis finnes det medisin for slikt. Det kalles koordinatskift:

$$\iiint_D f\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) r\sin^2\phi\;drd\phi d\theta$$

Trikset er å tenke parametrisering. Man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet hvis definisjonsmengde er en rektangulær boks. Akkurat som med linje- og flateintegraler må man huske å kompensere for farten til parametriseringen, og derfor er det en faktor $r\sin^2\phi$ til slutt i integralet over.

Det finnes to veldig viktige koordinattransformasjoner. Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z-aksen, bruker man sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Regn ut

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

der $R = \{(x,y,z) \,:\, 0 \le x^2+y^2 \le 9 \text{ og } 0 \le z \le 5\}$.

$\boxed{2}$ Finn volumet av den delen av kjeglen

$$z^2 \ge x^2+y^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x^2+y^2+z^2=1$.

$\boxed{4}$ Regn ut

$$\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dV$$

der legemet T er gitt ved $0 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge 0$.

Den andre viktige transformasjonen er kulekoordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= z\cos\phi \end{aligned}$$

Her er θ vinkelen du er vant med i xy-planet, og ϕ vinkelen (x,y,z) gjør med z-aksen.

$\boxed{4}$ Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

$\boxed{5}$ Finn

$$\iiint_R z \, dV$$

der R er området i rommet avgrenset av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, xz-planet, yz-planet, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Ukens nøtter

$\boxed{3}$ La R være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ samt planene $z = 0$ og $z = \sqrt{5}$.

Regn ut volumet av R.

$\boxed{2}$ Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$\rho = 4 - \cos(\varphi).$$