Divergensteoremet

Denne uken skal vi ta for oss to viktige teoremer - Stokes' teorem og divergensteoremet. Begge er matematiske teoremer som forteller noe om hvordan vektorfelt oppfører seg, og er sentrale elementer i utledningen av Maxwells lover, som du skal lære om over jul.

La oss begynne med divergensteoremet. Først må vi skjønne hva divergensen til et vektorfelt er:

$$\nabla \cdot \mathsf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Hver av komponentene til F har tre partiellederiverte, og divergensen til F er altså summen av tre av dem. Les 16.1 og 16.2 i Adams.

$\boxed{1}$ Finn divergensen til vektorfeltet $\mathsf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

Nå skal vi se litt på hva divergensen betyr.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{S}_\epsilon$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius ϵ, og la vektorfeltet F være gitt ved $\mathsf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La N være enhetsnormalen til $\mathcal{S}_\epsilon$ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathsf{F} \cdot \mathsf{N}\, dS.$$

$\boxed{3}$ Finn divergensen til coulombkraften til en ladning q

Les nå 16.4 i Adams.

Divergensteoremet

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathsf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathsf{F} \cdot \mathsf{N}\, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathsf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathsf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

Regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathsf{F} \cdot \mathsf{N}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen N peker ut fra T.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 7}$, $z = 0$ og $z = 2$. La vektorfeltet $\mathsf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathsf{F}(x, y, z) = (x - z, x + y, z + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?