Stokes teorem

Nå tar vi Stokes teorem. Først må vi skjønne hva curlen til et vektorfelt er:

$$\nabla \times \mathsf{F} =$$

Hver av komponentene til F har tre partiellederiverte, og divergensen til F er altså summen av tre av dem.

$\boxed{1}$ Finn curlen til vektorfeltet $\mathsf{F}(x, y, z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

Nå skal vi se litt på hva curl betyr. Les 16.1 og 16.2 i Adams.

$\boxed{2}$ La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2 + y^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathsf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathsf{F}(x, y) = (-y, x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}\,.$$

$\boxed{3}$ Finn curlen til coulombkraften til en ladning q.

Les nå 16.5 i Adams.

Stokes teorem

$$\int_{\partial D} \mathsf{F} \cdot ds = \iint_D \nabla \times \mathsf{F} \cdot \mathsf{N}\, dS$$

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2+(y+1)^2$ og $z = 10-x^2-(y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene.

La vektorfeltet $\mathsf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathsf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{5}$ La R være den delen av ellipsoiden $x^2 + y^2 + 8(z - 1)^2 = 9$ hvor $z \geq 0$, og la vektorfeltet $\mathsf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$\mathsf{F}(x, y, z) = \left(xz - 5y^3 \cos z, 5x^3 e^z, 6xye^{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Regn ut

$$\iint_R \nabla \times \mathsf{F} \cdot \mathsf{N}\, dS$$

der N er enhetsnormalen på R som peker vekk fra origo.