TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

Fouriertransform

Det går an å vise at dersom $x = x(t)$ er et signal som oppfører seg pent (ikke tenk så mye på hva det vil si inntil videre), og

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Dette kalles fouriertransform, og er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen. Men fouriertransform er helt ekstremt viktig i både matematikk og anvendelser. Det kan brukes til alt: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`. I et klassisk matematikkemne brukes fouriertransform først og fremst til å løse partielle differensiallikninger.

Vi begynner med å beregne et par transformer.

$\boxed{1}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/a \\ 0 & |t| \geq 1/a \end{cases}$$

Hva skjer med fouriertransformen når $a \to \infty$?

$\boxed{3}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

I de to neste oppgavene må du nesten anta at inversformelen gjelder, og bruke de foregående oppgavene.

$\boxed{4}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

$\boxed{5}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

Fouriertransformen er en lineæroperator:

$$\mathcal{F}\{x + y\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t))\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt + = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}\,dt = X(\omega) + Y(\omega)$$

Det er greit nok. En mindre innlysende, men veldig viktig regneregel er:

$$\boxed{\mathcal{F}(\dot{x}) = iw\mathcal{F}(x)}$$

$\boxed{6}$ Vis dette (hint: delvis integrasjon). Hva må du anta om x for at formelen skal gjelde?

$\boxed{7}$ Finn fouriertransformen til

$$f(t) = e^{-t^2}$$

(Vanskelig.)