TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

Konservative vektorfelt

For at en elektrotekniker skal bli inspirert til å forstå funksjoner av flere variable, er det sikkert greit å begynne med Coulombs lov. På skolen lærte du at kraften mellom to elektrisk ladde partikler er

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

der $\epsilon_0 \approx 8.8541878128 \cdot 10^{-12}\mathrm{F/m}$. Hvis ladningene q_1 og q_2 har samme fortegn, er den skalare kraften F positiv, og vi tolker dette som at kreftene prøver å skyve ladningene fra hverandre, og husker på at de virker langs den rette linjen mellom partiklene. Nå skal vi gå et skritt videre.

I elektromagnetisme er det vanlig å skille mellom elektrostatikk og elektrodynamikk. Førstnevnte betyr at alt står i ro i rommet, og man studerer denne først, fordi det er enklere. Når en ladning flytter på seg, lager den magnetfelt, og det gjør alt mer komplisert. Det er veldig fristende å sende ladninger rundt i rommet kun påvirket av Coulombs lov, men dette er altså litt risikabelt.

Heldigvis finnes det en annen lov som er matematisk sett helt identisk med Coulombs lov, nemlig Newtons gravitasjonslov. Den sier at gravitasjonskraften mellom legemer er gitt ved

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

der m_1 og m_2 er massene, r er avstanden mellom dem, og $G = 6.674\dot{1}0^{-11}$ kubikkmeter per kg per sekund per sekund. (Denne loven er presis nok til at Newton kunne regne på solens gang rundt jorden for hånd på slutten av 1600-tallet. Det er visst noen ting med Merkurs presesjon som ikke stemmer helt med loven, og å regne på store galakser er bare å glemme.)

$\boxed{1}$ Gitt informasjonen over, forklar hvorfor Coulombs lov på vektorform blir

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}$$

og for den saks skyld Newtons gravitasjonslov,

$$\mathbf{F} = G m_1 m_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3}.$$

Vi ser nå at

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

i Coloumbs lov og

$$G m_1 m_2$$

ikke gjør så mye interessant rent matematisk. Skal vi skjønne hvordan lovene oppfører seg, er det tilstrekkelig å studere

$$\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3},$$

så heretter skal vi gjøre det. Nå må vi også ta et valg på om vi skal jobbe i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, og vi velger $\mathbb{R}^2$ inntil videre av pedagogiske hensyn. La oss også, for å klarne tankene og slanke notasjonen, sette den ene planeten eller ladningen i origo. Vektorfeltet vi skal studere blir derfor

$$\mathsf{F}(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{x}}{|\mathsf{x}|^3} = \frac{[x_1, x_2]}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{3/2}} = \left[\frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{3/2}}, \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{3/2}}\right].$$

Begge disse kraftfeltene er funksjoner er eksempler på konservative vektorfelt. Den folkelige forklaringen på dette er at arbeidet som kraftfeltet gjør på en partikkel som beveger seg rundt i kraftfeltet ikke avhenger av trajektorien partikkelen beveger seg i, kun av trajektoriens endepunkter. På fagspråket sier man at et vektorfelt F er konservativt dersom

$$\mathsf{F} = \nabla f$$

for et skalarfelt f, og den folkelige forklaringen over er en konsekvens av dette. Husk at et skalarfelt er en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$, mens et vektorfelt er en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$.

$\boxed{2}$ Finn f slik at

$$\nabla f = \frac{\mathsf{x}}{|\mathsf{x}|^3}.$$

Det elektriske feltet fra en ladning eller gravitasjonsfeltet fra en planet er altså arketyper på vektorfelt. Du kan visualisere det som et vindkart på Dagsrevyen. Planet er fylt av små piler som indikerer retning og størrelse på kraften.

$\boxed{3}$ Bruk en eller annen software, og tegn vektorfeltet F.

Nå skal vi ta en titt på dette med arbeid. Et vektorfelt kan gjøre et arbeid på en partikkel som reiser rundt i feltet, og dette arbeidet er gitt ved

$$\int_\Gamma \mathsf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \dot{\mathsf{z}}(t)\, dt$$

der Γ er en kurve parametrisert av $\mathsf{z}(t)$. Endepunktene er $\mathsf{z}(a)$ og $\mathsf{z}(b)$. Dersom kurven er en lukket bane, er det vanlig å skrive

$$\oint_\Gamma \mathsf{F} \cdot ds$$

men dette er strengt tatt unødvendig, siden all informasjon om kurven er inneholdt i parametriseringen for Γ. Det er mulig å vise at verdien til integralet ikke avhenger av parametriseringen z.

$\boxed{4}$ La oss anta at en partikkel beveger seg langs enhetssirkelen i kraftfeltet F. Beregn arbeidet F gjør på partikkelen.

Dagens nøtt

Før du prøver deg på denne, bør du gå i en eller annen kilde og finne ut hvordan kjerneregelen funker i flere dimensjoner.

$\boxed{6}$ Vis at linjeintegralet

$$\int_\Gamma \mathsf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \dot{\mathsf{z}}(t)\, dt$$

kun avhenger av endepunktene til Γ dersom F er et konservativt felt.