

Mer om linjeintegraler

I denne økten skal vi prøve å komme nærmere på linjeintegralet, siden det er et viktig integral for å forstå potensiell energi i kraftfeltet fra en elektrisk ladning. La oss begynne med noe relatert, nemlig buelengde. Buelengden til en kurve Γ er gitt ved

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b \|\dot{z}\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

der $z(t) = [x(t), y(t)]$ er en parametrisering av Γ , med endepunkter $z(a)$ og $z(b)$. Det går an å vise at dette integralet ikke avhenger av parametriseringen z .

- 1 Finn buelengden til kurven parametrisert ved

$$z(t) = \left(\frac{1}{2} \ln(1 + t^2), \arctan t \right), \quad t \in [0, 2].$$

- 2 Et objekt beveger seg i planet slik at posisjonen til objektet er gitt ved

$$z(t) = \left(\frac{1}{2} \ln(1 + t^2), \arctan t \right), \quad t \in [0, \infty).$$

Hvor lang tid tar det før objektet har beveget seg 2 lengdeenheter fra $t = 0$?

Ok, la oss nå si at en brugde svømmer langs med en trajektorie gitt ved z , og at planktontettheten i vannet langs kurven er gitt ved $f(x, y)$. Hvis du tenker riemannsummer, er det kanskje ikke så vanskelig å se at det brugden spiser på en infinitesimal del av kurven er gitt ved

$$f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,$$

og derfor er det naturlig å definere linjeintegral over skalarfeltet f som

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

- 3 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} + xy.$$

Hvor mye plankton spiser brugden på en runde rundt?



By Greg Skomal / NOAA Fisheries Service

Nå er vi istand til å se på hvorfor arbeidsintegralet

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) dt$$

ser ut som det gjør. For å finne arbeidet kraftfeltet $\mathbf{F}$ gjør på en partikkel som farer langs en trajektorie i kraftfeltet, er vi interessert i å integrere opp kraftens komponent tangentielt med kurven:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\|\dot{\mathbf{z}}\|}$$

Merk at dette uttrykket blir et skalarfelt, og husk at

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\|\dot{\mathbf{z}}\|}$$

dersom Γ er parametrisert av $\mathbf{z}(t)$. I fysikken på videregående jobbet du stort sett under antagelsen at kraften var konstant, i fast vinkel θ med bevegelsesretningen, og at bevegelsen var en rettlinjett bevegelse med lengde s , slik at arbeidet kunne defineres som

$$Fs \cos \theta.$$

Arbeidet

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{z}}(t)}{\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) dt$$

er en generalisering av den enklere formelen du lærte på videregående. Merk hvordan lengdeelementet fra linjeintegralet kansellerer mot normaliseringsfaktoren i enhetstangentvektoren i definisjonen av arbeid.