TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

Krasjkurs i dobbeltintegral

Hvis du ønsker å visualisere en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$z = f(x, y)$$

har du to valg. Du kan tenke på f som taket i et hus eller ladningstettheten på en plate. Integralet

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

kan du i så fall tenke på som volumet av huset eller den totale ladningen på platen. I begge tilfeller er grunnflaten gitt ved D.

La oss begynne med noen enkelt. Hvis D er et rektangel blir det ikke noe vanskeligere enn i envariabel kalkulus. La oss finne volumet under funksjonen $f(x, y) = xy$, på firkanten avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $y = 1$. Det blir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^1 xy\, dxdy.$$

Nå integrerer vi denne rolig og steg for steg. Først tar vi det innerste integralet. Det er med hensyn på x, fordi dx står innerst. Integrer med hensyn på x, og lat som om y er en konstant.

$$\int_0^1 \int_0^1 xy\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 y \Big|_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 1^2 \cdot y - 0^2 \cdot y\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y\, dy$$

Funksjonen $\frac{1}{2}y$ er en funksjon som beskriver tverrsnittet i x-retningen av volumet vi driver og beregner. Nå skal vi bare integrere denne tverrsnittsfunksjonen:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{4} y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

og så har vi funnet volumet. Altså: dersom vi tar rektangelet mellom $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $y = 1$ som grunnflate, og beregner integralet av funksjonen xy over denne grunnflaten, får vi at dette legemet har volum $\frac{1}{4}$.

La oss nå kutte ned integrasjonsområdet D til det halve, altså trekanten avgrenset av $x = 0$, $y = 0$, og linjen $x + y = 1$. (Lurt å tegne dette opp på et papir.) Fremgangsmåten er den samme; vi må først integrere opp den ene variabelen for å få en funksjon som beskriver tverrsnittet av volumet vi skal ha, og så integrere denne funksjonen. Men nå blir det litt mer komplisert, for vi får et funksjonsuttrykk i en integrasjonsgrense i det innerste integralet. Integralet blir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy\, dxdy.$$

Forskjellen fra i sted er at det står $1 - y$ istedet for 1 i den innerste integrasjonsgrensen. Dette fordi at når vi skal beregne det innerste integralet for å lage tverrsnittsfunksjonen, skal vi bare integrere ut til linjen $x = 1 - y$, ikke helt ut til $x = 1$. Vi integrerer:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} xy \; dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 y\Big|_0^{1-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2 y \; dy$$

Så nå har vi, akkurat som i sted, fått en funksjon som gir oss tversnittet av integrasjonsvolumet som en funksjon av y. Vi fortsetter:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2 y \; dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y - 2y^2 + y^3 \; dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}$$

Så da blir altså volumet under flaten $\frac{1}{24}$ for dette integrasjonsområdet.

$\boxed{1}$ Skisser integrasjonsområdet til

$$\int_0^2 \int_{|y-1|}^1 (x + 2y)\, dx\, dy,$$

og regn ut det itererte integralet.

$\boxed{2}$ Beregn dobbeltintegralet:

$$\int_0^{\pi} \int_{-x}^{x} \cos(y) \; dy \; dx.$$

$\boxed{3}$ Beregn dobbeltintegralet **ved inspeksjon**:

$$\iint_{x^2+y^2 \le a^2} (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \; dA.$$

$\boxed{4}$ Finn gjennomsnittverdien til $x^2 + y^2$ over trekanten $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a - x$.

$\boxed{5}$ Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R \frac{x}{y} e^y \; dA$$

der R er området $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x$.

$\boxed{6}$ Avgjør om integralet konvergerer eller ikke:

$$\iint_Q e^{-x-y} \; dA$$

der Q er første kvadrant i xy-planet. Hvis det konvergerer, evaluer det.