Massesenter

Det finnes en tredje måte å visualisere en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$z = f(x, y)$$

på, nemlig massetetthet. Integralet

$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

blir da platen D sin totale masse.

$\boxed{1}$ En kjøkkenbenk med en buet ende er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $y = \sin x$. Den har konstant massetetthet lik 1, og Ole Bjørn lurer på om han klarer å løfte den. Finn kjøkkenbenkens totale masse.

Hvis du tenker på f som massetetthet, er det nærliggende å beregne platens massesenter. Dette er koordinatene til det punktet der Ole Bjørn kan balansere platen med en finger, og er gitt ved formlene

$$m_x = \frac{\iint_D x f(x, y)\, dA}{\iint_D f(x, y)\, dA}$$

og

$$m_y = \frac{\iint_D y f(x, y)\, dA}{\iint_D f(x, y)\, dA}$$

$\boxed{2}$ Ole Bjørn ønsker å balansere kjøkkenbenken på en finger i forbindelse med en jubileumskonkurranse i byggevarebutikken. Han må derfor beregne kjøkkenbenkens massesenter. Hjelp ham med det.

Du kan som sagt også tenke på f som taket i et hus.

$\boxed{2}$ Ole Bjørn har bygget et hus med en interessant grunnflate og skrått tak. Grunnflaten er området som er innesluttet mellom kurvene $y = x^2$ og $x = y^2$, og taket er gitt ved

$$f(x, y) = x + y.$$

Finn volumet til huset.

En funksjon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\rho = f(x, y, z)$$

kan du tenke på som massetettheten til et tredimensjonalt objekt. Massesenteret er gitt ved

$$m_x = \frac{\iiint_D x f(x, y, z)\, dA}{\iiint_D f(x, y, z)\, dV},$$

$$m_y = \frac{\iiint_D y f(x, y, z)\, dA}{\iiint_D f(x, y, z)\, dV},$$

og

$$m_z = \frac{\iiint_D z f(x, y, z)\, dA}{\iiint_D f(x, y, z)\, dV}.$$

La oss beregne massen og massesenteret til noen tredimensjonale objekter og.

$\boxed{3}$ Ole Bjørn ønsker å beregne massen til en oppvaskmaskin for å finne ut om han kan bære den opp i huset selv. Den har form som et rektangulært prisme avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ og $z = \pi$, og har massetetthet gitt ved

$$\rho = f(x, y, z) = \sin z.$$

$\boxed{4}$ Finn også massesenteret til oppvaskmaskinen.

$\boxed{5}$ Ole Bjørn har bygget en liten modell av holmenkollbakken. Den har konstant massetetthet 1, og er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ og $z = y^2$. Finn massen og massesenteret.

$\boxed{6}$ Ole Bjørn sager holmenkollbanen sin i to langs med planet gitt ved $x + 2y = 4$. Finn massen og massesenteret til delene.

Her kommer noen kjedelige regneoppgaver.

$\boxed{7}$ Regn ut det itererte integralet

$$\int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} (x + 2y)\, dx\, dy,$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

$\boxed{8}$ Skisser integrasjonsområdet til

$$\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \cos \frac{\pi}{4}(3x - x^3)\, dx\, dy.$$

Regn ut det itererte integralet.

Dagens nøtt

$\boxed{N}$ Et volum kan uttrykkes som en sum av itererte integral

$$V = \int_{0}^{3} \int_{0}^{y/3} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{3}^{4} \int_{0}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx\, dy$$

hvor $f(x, y) \geq 0$. Skisser integrasjonsområdet i xy-planet, og uttrykk V med integrasjonsrekkefølgen byttet om.