TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

# Repetisjonsøkt

I flervariabel kalkulus finnes det et utall integraltyper som passer til forskjellige anvendelser, og dette er veldig forvirrende i starten. Flervariabel integrasjon er antagelig det vanskeligste du skal lære i matematikkfagene på Gløshaugen.

Det er to ting man er nø dt til å huske:

- Hva slags integrasjonsområde?
- Hva slags integrand?

I envariable integraler er disse spørsmålene enkle - integrasjonsområdet er alltid et intervall på $\mathbb{R}$, og integranden er en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. I flervariabel kalkulus er det mer å holde styr på.

## Linjeintegraler

Det første integralet vi har hatt er envariabelt, og kalles linjeintegral. Integrasjonsområdet er en kurve $\Gamma$ i $\mathbb{R}^n$, parametrisert ved $\mathsf{z}(t)$, $a \leq t \leq b$. Vi kan putte inn tre forskjellige integrander. Hvis du putter inn 1, får du buelengden til $\Gamma$:

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{\mathsf{z}}(t)\| \, dt$$

$\boxed{1}$ Finn lengden til kurven parametrisert ved

$$\mathsf{z}(t) = [t\cos t, t\sin t, t] \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Som du ser, disse integralene ende opp med å bli ganske hårete. Hvis du vil linjeintegrere en funksjon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bør du tenke at $f$ beskriver massetettheten til en tråd som ligger langs $\Gamma$. Den totale massen til tråden blir:

$$\int_\Gamma f \, ds = \int_a^b f(\mathsf{z}(t))\|\dot{\mathsf{z}}(t)\| \, dt$$

Du kan også tenke at en brugde svømmer langs $\Gamma$ og spiser mikroplast. I så fall er $f$ tettheten av plastpartikler, og integralet er den totale mengden plast brugden spiser når den svømmer fra $t = a$ til $t = b$.

$\boxed{2}$ En brugde svømmer langs med

$$\mathsf{z}(t) = [t\cos t, t\sin t, t] \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

og spiser plast. Tettheten er gitt ved $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Finn brugdens totale konsumerte plastmengde.

Den tredje tingen du kan putte inn, er den tangentielle komponenten til et vektorfelt $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dette bør du tenke på som arbeidet en kraft gitt ved $F$ gjør på en partikkel som reiser langs trajektorien $\Gamma$. Dette høres mer komplisert ut ved første øyekast, men i dette integralet er det en heldig kansellering som ofte gjør det enklere å beregne:

$$\int_\Gamma \mathsf{F} \cdot \mathsf{T} \, ds = \int_a^b \mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathsf{z}}(t)}{\|\dot{\mathsf{z}}(t)\|}\|\dot{\mathsf{z}}(t)\| \, dt = \int_a^b \mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \dot{\mathsf{z}}(t) \, dt$$

Lengdeelementet $\|\dot{z}(t)\|$ i linjeintegralet er jo det samme som normaliseringsfaktoren i uttrykket

$$\frac{\dot{z}(t)}{\|\dot{z}(t)\|}$$

for enhetstangentvektoren!

$\boxed{3}$ En partikkel beveger seg langs trajektorien

$$z(t) = [t\cos t, t\sin t, t] \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

i et kraftfelt gitt ved

$$F(x) = \frac{x}{\|x\|^3}.$$

Finn arbeidet kraftfeltet gjør på partikkelen.

## Dobbeltintegraler

For å visualisere et dobbeltintegral

$$\iint_D f\,dA$$

bør du tenke at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er taket i et hus med grunnflate $D$. Det enkleste å begynne med er når $D$ er et rektangel.

$\boxed{4}$ Taket i et hus er gitt ved $f(x,y) = 1 + x + y$, og grunnflaten er et rektangel avgrenset av $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ og $x = 1$. Finn volumet av huset.

Integralet i oppgaven over skrives enten

$$\iint_D f\,dA = \int_0^2 \int_0^1 1 + x + y\,dydx$$

eller

$$\iint_D f\,dA = \int_0^1 \int_0^2 1 + x + y\,dxdy$$

for man kan selv velge integrasjonsrekkefølgen. (De blir som regel like, men ikke alltid. Dersom integralet ikke konvergerer absolutt, kan det bli problemer.) De innerste integralene

$$\int_0^1 1 + x + y\,dy$$

og

$$\int_0^2 1 + x + y\,dx$$

kan du tenke på som tverrsnitt. Hvis du sager huset i to med en motorsag langs med en bestemt verdi for $x$, er arealet av tverrsnittet gitt ved

$$\int_0^1 1 + x + y\,dy$$

og sager du i to langs med en bestemt verdi for $y$, er tverrsnittsarealet

$$\int_0^2 1 + x + y\,dx.$$

Hvis du nå husker formelen for volumet av et omdreiningslegeme:

$$\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

husker du også kanskje at når vi integrerer tverrsnittsfunksjonen $\pi f^(x)$, får vi volumet av omdreiningslegemet. Likeledes får vi totalvolumet når vi integrerer enten

$$\int_0^1 1 + x + y\, dy$$

fra $x = 0$ til $x = 2$:

$$\int_0^2 \int_0^1 1 + x + y\, dydx$$

eller

$$\int_0^2 1 + x + y\, dx$$

fra $y = 0$ til $y = 1$:

$$\int_0^1 \int_0^2 1 + x + y\, dxdy$$

Nå kommer vi til det mest forvirrende av alt. La oss si at vi sager $D$ i to på skrå, langs med linjen $x = 2y$. Vi lar nå $D$ være den nederste av de nye bitene, og ønsker å beregne volumet med denne nye grunnflaten men samme tak $f(x, y)$.

$\boxed{5}$ Tegn opp, og forklar at funksjonen som beskriver arealet av tverrsnittet kan skrives enten

$$\int_0^{x/2} 1 + x + y\, dy$$

eller

$$\int_{2y}^1 1 + x + y\, dx.$$

Finn så volumet av huset begge veier.

$\boxed{6}$ Vi prøver oss nå på en grunnflate. La oss ta det området som ligger mellom $y = x^2$ og $x = y^2$. Forklar at volumet blir

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 + x + y\, dydx$$

og regn ut.

$\boxed{7}$ Ta nå området som ligger i den delen av enhetsirkelen som ligger i første kvadrant. Forklar at volumet blir

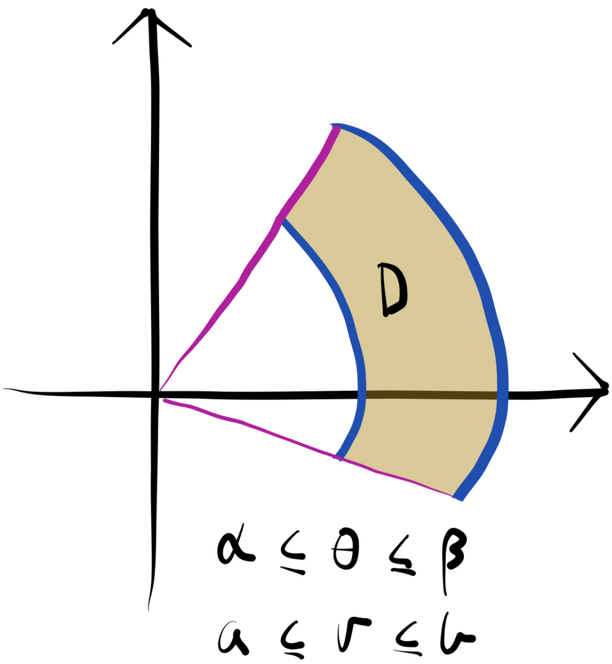
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 + x + y\, dydx$$

og regn ut.

Det ble nok litt regning på forrige oppgave. Takk og lov for polarkoordinater. Dersom du har et området som er sirkulært av natur, er det mye enklere å bruke polarkoordinater. Integralet blir

$$\iint_D f\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

Du bør kanskje gjøre som von Neumann, og begynne med å venne deg til dette. Det kommer til å bli lettere å forstå når vi har hatt flateintegraler om noen uker.




$\boxed{8}$ Regn ut oppgaven over i polarkoordinater, og nyt hvor mye lettere alt blir.

Nå skal vi ta en oppgave som kombinerer litt linjeintegral og dobbeltintegral, og samtidig peker litt fremover i pensum.

$\boxed{9}$ La $D$ være området begrenset av $x$-aksen og halvsirkelen $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$, og la $\Gamma$ være randen til $D$ orientert mot klokken. La vektorfeltet $\mathsf{F} : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ være gitt ved

$$\mathsf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x^2 y, -xy^2).$$

Finn $\int_\Gamma \mathsf{F} \cdot \mathsf{T}\, ds$

$\boxed{10}$ Regn ut

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

og finn så

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA.$$

Sikkert lurt å bruke polarkoordinater. Ser du noe artig? (Hint: slå opp 16.3 i Adams.)