Gradienten

En funksjon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$z = f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

har n partiellderiverte. Den k-te partiellderiverte skriver vi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

eller

$$f_{x_k}.$$

Hver av disse er en funksjon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som forteller hvor mye f stiger i retningen x_n. Det er vanlig å sette de partiellderiverte i en vektor som kalles gradienten:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

Gradienten er en funksjon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, altså et vektorfelt.

Det første vi må gjøre, er å finne ut hvordan vi beregner stigningen i en vilkårlig retning. Gå i Adams og let etter directional derivative.

$\boxed{1}$ Du går på fjelltur på et fjell som har fasongen

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

Du står i punktet $(x, y) = (1, 1)$ og går i retningen $(-1, 2)$. Hvor bratt oppoverbakke går du i?

$\boxed{2}$ Bruk nå din kunnskap om skalarprodukt til å finne ut i hvilken retning du skal gå om du vil gå så bratt som mulig.

Hvis du fikk til forrige oppgave, har du nå skjønt at gradienten er to ting på en gang:

- Stigningen i hver koordinatretning
- Den retningen der funksjonen har brattest stigning

Dette kan vi utnytte geometrisk. La oss se litt mer på fjellet.

$\boxed{3}$ Finn et uttrykk for fjellet

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

sin skjæringskurve med (x, y)-planet. Hva slags kurve er det?

$\boxed{4}$ Finn en parametrisering for ovennevnte kurve.

Hvis du fikk til oppgavene over, har du nå tilgang på to forskjellige beskrivelser av kurven:

- Algebraisk likning $f(x, y) = 0$.
- Parametrisering $(x(t), y(t))$.

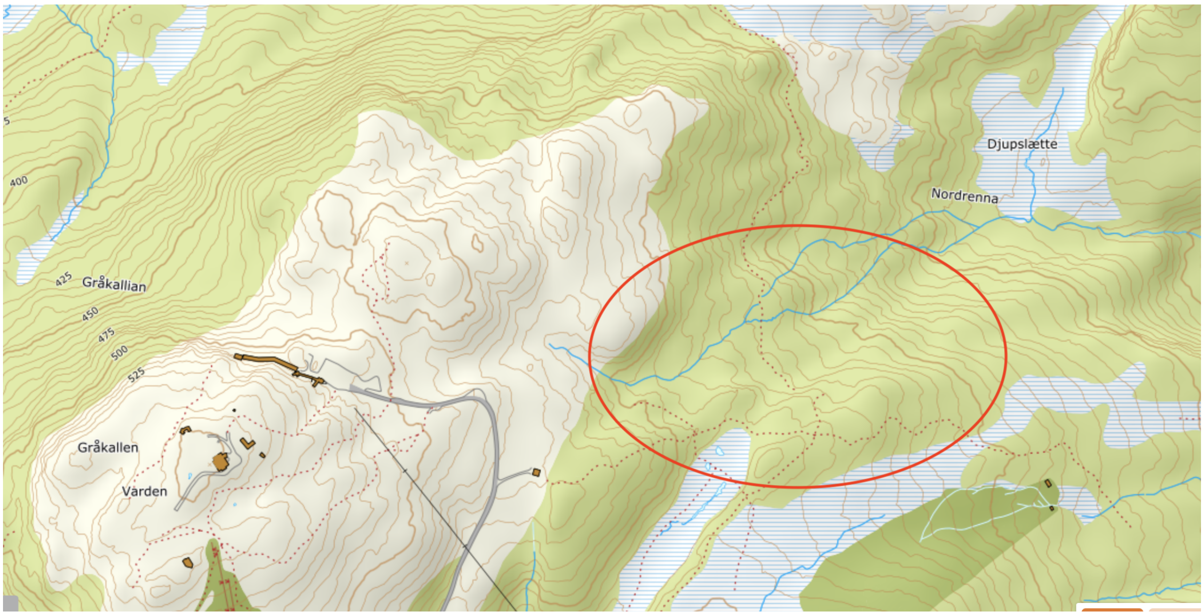
Vi har tidligere sett at dersom du har en parametrisering av en kurve, er det lett å finne tangent- og normalvektor:
`https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4106/2021v/notater/06-vektorfunksjoner.pdf`
Vi skal nå se at gradienten kan brukes til det samme.

$\boxed{5}$ Tenk at du står på ski i en slalombakke gitt ved $z = f(x, y)$. Du vet at dersom du skal sette rett utfor så bratt som overhodet mulig, bør du peke skiene i retningen gitt av ∇f. Hva er vinkelen mellom den bratteste retningen og den retningen der skiene står vannrett? (Altså den retningen skiene peker når du har til hensikt å stå helt stille og nyte utsikten.)

Du husker kanskje at en likning på formen $f(x, y) = 0$ beskriver en nivåkurve for f, altså en kurve der f er konstant.

$\boxed{6}$ Bruk oppgaven over til å forklare hvorfor ∇f står normalt på kurven $f(x, y) = 0$.

Hvis du har skjønt alt over, er det relativt lett å forklare noe som kalles Lagranges multiplikatormetode. La oss si at du går på fjellet gitt av $z = f(x, y)$ og at gps-tracken din er gitt av en kurve med likning $g(x, y) = 0$. I figuren under er en person ute og går på Gråkallen. Ekvidistanselinjene på kartet er nivåkurvene til f, og vedkommende går en elliptisk tur gitt av den oransje kurven.



$\boxed{7}$ Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle, altså at

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

for en konstant λ.

$\boxed{8}$ Du går på fjellet

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

langs med trajektorien gitt ved $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Finn det høyeste punktet på turen din.