

Mer om flater

I denne uken skal vi se på flater i rommet. Når man skal skjønne noe av funksjoner fra \mathbb{R}^n til \mathbb{R}^m er det fornuftig å ha den riktige visualiseringen. Du vet at en funksjon fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R} gitt ved

$$z = f(x, y)$$

kan visualiseres som en flate i rommet. Man tenker på det som et hus, der (x, y) angir en koordinat i husets gulv, og så gir f takhøyden i dette punktet.

Likningen

$$z = f(x, y)$$

er en likning med tre variable som er løst for den ene variabelen z . Flater i rommet kan ofte beskrives ved slike likninger, men de trenger jo ikke være løst for den ene variabelen.

- 1 Finn likningen for en kule med radius R og sentrum i (x_0, y_0, z_0) .

En mer generell måte å beskrive flater i rommet på, er ved hjelp av funksjoner fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^3 . Dersom vi har en slik funksjon til å beskrive flaten, sier vi at flaten er parametrisert. Dette er analogt til kurver i planet. Både $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t))$$

beskriver kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. (Du kan for eksempel ikke beskrive en kurve som krysser seg selv med en likning på formen $y = f(x)$.)

- 2 En funksjon \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^3 er gitt ved

$$x(\theta, \phi) = \cos \theta \sin \phi$$

$$y(\theta, \phi) = \sin \theta \sin \phi$$

$$z(\theta, \phi) = \cos \phi$$

Finn ut hva slags type flate det er.

Nå skal vi se på hvordan vi regner ut overflatearealet til en parametrisert flate.

- 3 En flate er gitt ved parametriseringen

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Les kap. 15.5 i Adams og forklar hvorfor arealet av en bitte liten bit av denne flaten blir

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right|$$

Se også her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface

- 4 Finn overflatearealet til enhetskulen.

Analogt til linjeintegral, definerer vi flateintegral over skalarfelt som

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = \iint_D f(z(x)) \left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right| dA$$

der \mathcal{S} er flaten parametrisert av z og D definisjonsmengden til z . Du bør tenke på f som massetetthet målt i masse per arealenhet, og på flateintegralet som den totale massen til flaten \mathcal{S} gitt denne massetettheten.

- 5 Hva veier en ting formet som enhetskuleskallet og har massetetthet gitt ved $f(z) = 1 + z_3$?

En ting som er greit med flateintegraler, er at om man har skjønt dette, blir det enkelt å skjønne koordinatskift i dobbeltintegraler. Du kan tenke på de originale koordinatene som definisjonsmengden til parametriseringen for flaten, og på de nye koordinatene som en flate med $z_3 = 0$.

- 6 Bruk dette til å forklare hvorfor arealelementet er $rdrd\theta$ i polarkoordinater.

Ukens nøtt

- 7 Massesenteret til en todimensjonal ting med masstetthet ρ er definert som

$$m_x = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x \rho dS}{\iint_{\mathcal{S}} \rho dS}$$

osv. Finn massesenteret til et kakestykke med radius R , uniform tetthet og vinkelutslag 2α .