Fluksintegraler

En funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$ er vel greiest å tenke på som væskeflyt. Du putter inn et punkt i rommet, og får ut en tredimensjonal vektor som beskriver væskeflyten i det punktet. Dette akkurat som funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, men mer realistisk og vanskeligere å se for seg. Elektrisk felt er selvfølgelig en klassiker. Coulombfeltet fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(\mathsf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathsf{x}}{|\mathsf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{[x_1, x_2, x_3]}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x_1}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}, \frac{x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}, \frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{3/2}}\right] \end{aligned}$$

Sett at vi har en flate $\mathcal{S}$ med enhetsnormalvektor N. Det viktigste konseptet å lære i denne bolken kalles fluksintegral:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathsf{F}\cdot\mathsf{N}\, dS$$

Dette er flateintegralet til skalarfeltet $\mathsf{F}\cdot\mathsf{N}$, og forteller om vektorfeltet F sin totale utstrømning gjennom flaten $\mathcal{S}$. Tenk at du står ute i en elv med vadebukser og holder en tom ramme under vann eller noe slikt og måler hvor mange liter vann som flyter gjennom rammen per tidsenhet. For å få grepet om dette, er det mange ingredienser som må på plass. Begynn med å lese 15.6 i Adams.

$\boxed{1}$ La flaten være parametrisert ved $\mathsf{z}(\mathsf{x})$. Forklar at de partiellderiverte

$$\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_2}$$

begge er tangentvektorer til flaten.

$\boxed{2}$ Forklar at enhetsnormalvektoren til flaten er gitt ved

$$\mathsf{N} = \frac{\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_2}\right|}$$

Nå ser du at vi har flaks. Normaliseringsfaktoren i enhetsnormalvektoren til flaten er jo den samme som arealelementet i flateintegralet, og disse kansellerer på samme måte som de gjorde for linjeintegral over vektorfelt:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathsf{F}\cdot\mathsf{N}\, dS = \iint_D \mathsf{F}(\mathsf{z}(\mathsf{x}))\cdot\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_1}\times\frac{\partial \mathsf{z}}{\partial x_2}\, dA$$

(Husk at D er verdimengden til z, altså det du må putte inn i z for å få ut $\mathcal{S}$.) Nå tar vi noen klassikere fra vanlig M2.

$\boxed{3}$ La $\mathcal{S}$ være den triangulære flaten med hjørner $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$, og la vektorfeltet $\mathsf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathsf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$. La n være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ med positiv k-komponent. Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathsf{F}\cdot\mathsf{n}\, dS.$$

$\boxed{4}$ La $\mathcal{S}$ være den øvre halvdelen ($z \geq 0$) av kuleflaten med radius 1 og sentrum i origo, og la vektorfeltet $\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathsf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La n være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker vekk fra origo. Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathsf{F} \cdot \mathsf{n} \, dS.$$

$\boxed{5}$ En ladning q er omgitt av et kuleskall sentrert i ladningen og med radius 1. Finn coulombfeltets utstrømning gjennom kuleskallet.

Nå en oppgave om vanlig flateintegral.

$\boxed{6}$ Betrakt flaten gitt ved $z = \sqrt{2xy}$, med $1 \leq x \leq 5$ og $1 \leq y \leq 2$. Hva er flatens masse dersom massetettheten er gitt ved $\rho(x, y, z) = 6z$?

Ukens nøtter

$\boxed{7}$ La $\mathcal{S}$ være kuleflaten som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$. Finn arealet av den delen av $\mathcal{S}$ som ligger over planet $z = 2$.

$\boxed{8}$ Flaten $\mathcal{S}$ er beskrevet ved parametriseringen $\mathsf{s} : D \to \mathbb{R}^3$ der

$$\mathsf{s}(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, r^2\right)$$

og

$$D = \left\{(r, \theta) \mid \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{6}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Finn arealet av $\mathcal{S}$.