TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS

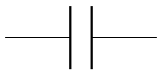
Laplacetransformasjonen

I denne økten skal vi videre se på bruksområder for Laplacetransformasjonen.

Standardoppgaver

Resistans er en størrelse definert som v/i, forholdet mellom spenningen over- og strømmen gjennom en komponent. Denne størrelsen er viktig for å modellere komponenter i en krets. Men hva skjer med komponenter hvor spenningen og strømmen ikke øker proposjonalt med hverandre? Det vil si: Hvordan skal vi modellere komponenter som kondensatorer og spoler?

Under er de fysiske sammenhengene mellom spenning og strøm i kondensatorer og spoler gjengitt. Det er ingen enkel, proposjonalt sammenheng mellom strømmen og spenningen i disse komponentene. Iallefall ikke i tids-domenet.

Navn	Formel	Symbol
Kondensator	$\frac{d}{dt}v_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t)$	C 
Spole	$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$	L 

$\boxed{1}$ Bruk Laplace på hver side av formlene for en kondensator i tabellen over og finn et uttrykk for den "resistans-aktige" sammenhengen $V_C(s)/I_C(s)$ hvis initialbetingelsene er 0. Her bruker vi den vanlige konvensjonen at $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$.

Gjør det samme for spolen og for den "vanlige" resistanse-formelen $v_R(t) = i_R(t) \cdot R$.

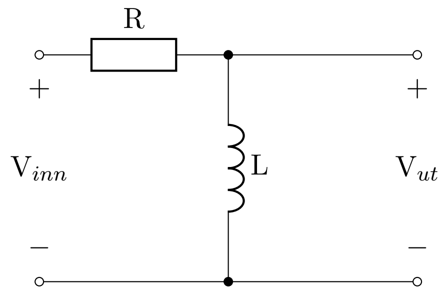
Det vi har laget nå kalles impedans og er et generalisert uttrykk for resistans som tar høyde for den ikke-proposjonale naturen til spoler og kondensatorer. Bemerk at impedans er en størrelse som ikke eksisterer i tidsdomenet, men i s-planet. Impedans skrives ofte med bokstaven $Z(s)$.

Her er fasit til forrige oppgave.

Navn	Impedans
Motstand	$Z_R(s) = R$
Kondensator	$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$
Spole	$Z_L(s) = sL$

Vi kan videre se hvordan Laplace og Impedans kan la oss analysere kompliserte kretser.

Under er gjengitt en mystisk krets.



Impedans er på en måte er det samme som resistans, slik at vi kan bruke reglene om serie- og parallellkobling av resistanser for å lage ekvivalente impedanser i kretser. Regnereglene for dette er gjengitt her: $Z_{eq,--} = Z_1 + Z_2$, $Z_{eq,||} = \frac{1}{1/Z_1+1/Z_2}$

$\boxed{2}$ a) Bytt ut hver av komponentene i denne kretsen til s-plan ekvivalentene fra tabellen over. Finn deretter $Z_{eq}(s)$ sett fra $V_{inn}(s)$ ved hjelp av regnereglene for serie- og parallellkobling. Bruk $Z_{eq}(s)$ og $V_{inn}(s)$ til å finne et uttrykk for $I(s)$, strømmen i kretsen, og bruk dette til å finne et uttrykk for $V_{ut}(s)$. Du skal til slutt ende opp med et uttrykk som kun inneholder $V_{ut}(s)$, $V_{inn}(s)$, s, R og L.

b) Bruk Kirchoffs lover til å sette opp diff-ligningen til kretsen, la $v_{inn}(t)$ og $v_{ut}(t)$ være de eneste ukjente variablene (R og L er konstanter, ikke variabler). Alle initialbetingelser er 0.

c) Bruk Laplace på hver side av diff.ligningen og finn forholdet $\frac{V_{ut}(s)}{V_{inn}(s)}$.

Forhåpentligvis gikk dette bra, og de to metodene (som egentlig er samme metode) gir samme svar.

Vi sett hvordan Laplace gir en enklere beskrivelse av kretser med reaktive komponenter, i den forstand at det er enklere å sette opp en formel på forholdet mellom det man får inn og det man får ut i s-domenet. Men vi er jo egentlig interessert i hva som skjer i helt vanlig tidsplan for vårt inngangssignal V_{inn}. Dette skal vi gjøre nå.

$\boxed{3}$ a) Anta at $v_{inn}(t)$ er et enhetssprang ($V_{inn}(s) = \frac{1}{s}$). Sett dette inn i likningen for kretsen og finn $v_{ut}(t)$ (altså i tidsdomenet!).

b) Lag en graf av utgangsspenningen for $t \geq 0$ hvis $R = 100\Omega$, $L = 1mH$.