Fouriertransform

I de første ukene så vi på Laplace- og Fouriertransformen, disse så ut som følger:

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Disse var ærlig talt ganske mystiske. Denne uken skal vi fokusere på Fouriertransformen siden den er megaviktig for mange elektroformål. Håpet er at vi i løpet av uken skal besvare spørsmål som "hvor kommer dette integralet fra?" og "hva forteller Fouriertransformen oss egentlig?" og "hvorfor skal jeg bry meg om Joseph Fourier?".

Figur 1: Joseph Fourier. Avdød matematiker.

Oppgaver

I TMA4106 så vi på Fourierrekken til funksjoner, de kunne skrives på denne formen:

$$f(t) \sim \Sigma_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi t}{L}} \tag{1}$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-j\frac{n\pi t}{L}}dt \tag{2}$$

Dette var noe vi kunne gjøre for mange forskjellige valg av f. Koeffisienten c_n endte opp med å bli et tall (gjerne avhengig n) som sa noe om "hvor mye" av $\cos(\frac{n\pi}{L}t)$ og $\sin(\frac{n\pi}{L}t)$ input-funksjonen vår f "inneholder". Om denne siste setningen ikke ga mening er det viktig at du fordøyer formel (1), for å prøve å overbevise deg selv om at dette stemmer (husk Eulers formel: $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$).

$\boxed{1}$ Vi velger halv-perioden $L = \pi$, beregn så c_n til

a) $f_1(t) = \cos(t)$

b) $f_2(t) = 0.5\cos(2t)$

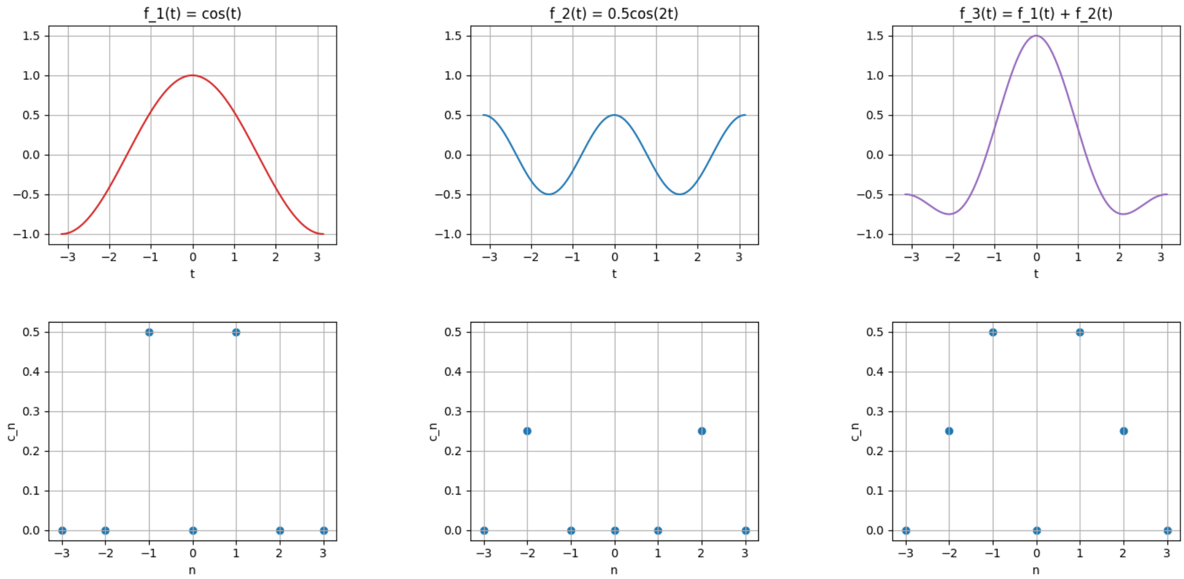
c) $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Hint: Se i notisene fra TMA4106 og husk regelene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = \begin{cases} \pi, & \text{for } m = n \\ 0, & \text{for } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt = 0, \ \forall\ m, n$$

Koeffisientene vi nettopp beregnet kan tegnes på følgende måte:



Figur 2: Fourierkoeffisientene til rene cosinus-signaler. Bemerk hvordan frekvensen til cosinus-signalet gir punktet n hvor koeffisienten dukker opp, og at amplituden til cosinusen vises i amplituden til koeffisienten.

Forhåpentligvis illustrerer dette hvordan Fourierkoeffisientene c_n sier oss noe om hvor mye funksjonen vår "inneholder" deler av cosinuser med forskjellige frekvenser.

Hva har nå dette med Fourier*transformen* å gjøre?

$\boxed{2}$ Nistirr på følgende formler:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-j\frac{n\pi t}{L}}dt$$

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Forsøk å gi en uformell forklaring av sammenhengen mellom disse to formlene. Tenk spesielt på

a) Hvis c_n sier noe om hvor mye av den diskrete frekvensen n som $f(t)$ inneholder, hva sier da $F(\omega)$?

b) Når c_n beregnes tar vi integralet over perioden til et periodisk signal. Hva må skje med L for å få Fouriertransformen? Hvor blir det av perioden L?

Dersom man klarer å overbevise seg selv om at Fouriertransformasjonen til en funksjon $f(t)$ sier *hvor mye* av hver mulige frekvens som er inneholdt i den funksjonen kan man begynne å gjøre morsomme greier.

$\boxed{3}$ Gi en uformell forklaring på hvordan du forventer at $\mathscr{F}\{f\}(\omega)$ ser ut dersom

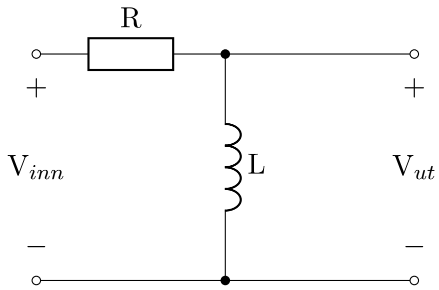
a) $f_1(t) = \cos(t)$

b) $f_2(t) = 0.5\cos(2t)$

c) $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Bruk så en Fourier-kalkulator, f.eks. Wolfram Alpha sin (link), for å bekrefte intuisjonen din. Du kan også regne for hånd, men dette kan bli vanskelig.

I forrige uke betraktet vi kretsen gjengitt under.



Da fant vi ut at det i s-planet var følgende forhold mellom spenningen vi sender inn og den vi får ut:

$$V_{ut}(s) = \frac{s}{\frac{R}{L} + s} \cdot V_{inn}(s)$$

Laplace-transformasjonen har gitt oss et bilde av hvordan kretsen vår oppfører seg når vi varierer på verdien $s = \sigma + j\omega$. Men den fysiske meningen bak s kan være vanskelig å tolke, så vi gjør det lettere ved å betrakte et spesialtilfelle. Dette spesialtilfellet er nemlig Fouriertransformen!

$\boxed{4}$ Anta at $R = L = 1$.

a) Sett inn $s = j\omega$ ($\sigma = 0$) i formelen til kretsen, hvor $j = \sqrt{-1}$ og finn et uttrykk for $V_{ut}(j\omega)$.

b) Finn et uttrykk for størrelsen $|V_{ut}(j\omega)|$, la $|V_{inn}(j\omega)|$ fortsatt være ukjent (hint: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$).

Det vi beveger oss inn på nå er frekvensresponsentil kretsen, og en kan se hvordan denne henger naturlig sammen med Laplacetransformen til diff. ligningen til kretsen, impedans-ekvivalentene av alle komponentene og viktigs av alt: Fouriertransformen. Det siste steget er å se hvordan kretsen "inneholder" forskjellige mengder av forskjellige frekvenser.

$\boxed{5}$ Anta at vi påtrykker kretsen vår med en periodisk spenning som alltid har amplitude 1 ($|V_{inn}(j\omega)| = 1$). Hva blir amplituden på ut-spenningen, $|V_{ut}(j\omega)|$, dersom frekvensen er

a) $\omega = 0.001$ [rad/ s]

b) $\omega = 1$ [rad/s]

c) $\omega = 1000$ [rad/s]

Hvis du skulle gitt denne oppførselen et navn, hva ville du kalt det? Har du kanskje vært borte i noe slik som dette fra før?