Ting du bør kunne skrive ned uten å konsentrere deg så veldig hardt

Det er ingen hjelpemidler på eksamen i TMA4111, så derfor er man pent nødt til å huske en del ting. Det er litt arbeid, men det å huske noe er for de fleste en grei lakmustest på om du har skjønt det, for det er ikke mulig å pugge hele pensum uten å forstå noe som helst.

For hver av de grå boksene i denne filen bør du klarer å lage omtrent en A4-side; fyll siden på din egen måte med teoremer, eksempler, figurer og logiske implikasjonsrekker.

Bruk penn og papir, ikke tablet eller datamaskin, for da husker du antagelig mye bedre:
`https://neurosciencenews.com/hand-writing-brain-activity-18069/`

Funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$

Derivasjon

La $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være gitt ved

$$\mathsf{F}(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix}$$

Da er

$$\mathsf{F}'(\mathsf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Denne kalles gjerne Jacobimatrisen til F.

Viktig spesialtilfelle I

Dersom $\mathsf{z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, skriver vi $\dot{\mathsf{z}}$ istedet for z', og

$$\dot{\mathsf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_m \end{bmatrix}$$

Vektoren $\dot{\mathsf{z}}$ er tangenten til kurven z.

Viktig spesialtilfelle II

Dersom $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, skriver vi

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Komponent k i denne vektoren angir stigningen i retningen til x_k. Dersom du ønsker stigningen i en vilkårlig retning gitt av enhetsvektoren v, er denne gitt ved

$$\mathsf{v} \cdot \nabla f$$

Viktig spesialtilfelle III

Dersom $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kan vi beregne

$$\det \mathsf{F}'(\mathsf{x})$$

som kalles Jacobideterminanten. Denne forteller noe om hvor mye F krymper eller utvider områder i $\mathbb{R}^n$, og dukker opp som volumkompensasjon når F brukes som variabelskifte i multiple integraler.

Kjerneregelen i flere variable

La $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $\mathsf{G} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ og $\mathsf{H} = \mathsf{F}(\mathsf{G})$. Da er H' gitt ved matriseproduktet

$$\mathsf{H}' = \mathsf{F}'(\mathsf{G})\,\mathsf{G}'$$

To viktige koordinattransformasjoner

Funksjoner fra $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles i noen tilfeller koordinattransformasjon, for eksempel i forbindelse med variabelskift i multiple integraler. To viktige transformasjoner er sylinderkoordinater $(r, \theta, h) \to (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta \\ x_3 &= h \end{aligned}$$

og kulekoordinater $(r, \theta, \phi) \to (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta\sin\phi \\ x_2 &= r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 &= r\cos\phi \end{aligned}$$

Integraler

Buelengden til en parametrisert kurve

En kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$ parametrisert ved $\mathsf{z} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ har buelengde

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left\| \dot{\mathsf{z}}(t) \right\| \, dt$$

Linjeintegral over skalarfelt

Dersom en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$ er parametrisert ved $\mathsf{z} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, er linjeintegralet til $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ over $\mathcal{C}$ gitt ved

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\mathsf{z}(t)) \left\| \dot{\mathsf{z}}(t) \right\| \, dt$$

Man kan ved kjerneregelen vise at dette integralet ikke avhenger av hvilken parametrisering z man har valgt for $\mathcal{C}$. Du bør tenke på $\mathcal{C}$ som en tråd med massetetthet f. Integralet blir da trådens totale masse. (Eller brugde og planktontetthet og totalt næringsinntak.)

Greg Skomal / NOAA Fisheries Service

Linjeintegral over vektorfelt

Dersom en kurve $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^n$ er parametrisert ved $\mathsf{z} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, er linjeintegralet til $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ over $\mathcal{C}$ gitt ved

$$\int_{\mathcal{C}} \mathsf{F} \cdot ds = \int_a^b \mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \dot{\mathsf{z}}(t) \, dt$$

Dette integralet har fremkommet ved å stappe tangentialkomponenten

$$\mathsf{F}(\mathsf{z}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathsf{z}}(t)}{\|\dot{\mathsf{z}}(t)\|}$$

inn i formelen for linjeintegral over skalarfelt. Du bør tenke på F som en kraft, og på integralet som det totale arbeidet F gjør på en partikkel som reiser langs $\mathcal{C}$.

Overflatearealet til en parametrisert flate

En flate $\mathcal{S}$ parametrisert ved $\mathrm{z} : D \to \mathbb{R}^3$ har overflateareal

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2} \right\| d\mathrm{x}$$

Her er $\iint_D$ et vanlig dobbeltintegral over området $D \in \mathbb{R}^2$, altså definisjonsmengden til z. Kryssproduktet er $\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2}$ er en normalvektor til flaten $\mathcal{S}$.

Flateintegral over skalarfelt

Dersom en flate $\mathcal{S}$ er parametrisert ved $\mathrm{z} : D \to \mathbb{R}^3$, er flateintegralet til $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, dS = \iint_D f\left(z(\mathrm{x})\right) \left\| \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2} \right\| d\mathrm{x}$$

Også her bør du tenke på f som massetetthet og integralet som flaten $\mathcal{S}$ sin totale masse.

Flateintegral over vektorfelt

Dersom en flate $\mathcal{S}$ er parametrisert ved $\mathrm{z} : D \to \mathbb{R}^3$, er flateintegralet til $\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{F} \cdot dS = \iint_D \mathrm{F}\left(z(\mathrm{x})\right) \cdot \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2} \, d\mathrm{x}$$

Dette integralet har fremkommet ved å stappe normalkomponenten

$$F\left(z(\mathrm{x})\right) \cdot \frac{\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2}}{\left\| \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial x_2} \right\|}$$

inn i formelen for flateintegral over skalarfelt. Du bør tenke på F som strømningen i en væske, og på integralet om den totale flyten gjennom flaten $\mathcal{S}$. Hvis du liker elektromagnetisme, bør du heller tenke på F som elektrisk felt, og på integralet som elektrisk fluks gjennom flaten $\mathcal{S}$.

Vektorkalkulus

Divergensteoremet

Dersom $\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er kontinuerlig deriverbar og $\Omega \in \mathbb{R}^3$ har stykkvis glatt overflate, er

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathrm{F} = \iint_{\partial\Omega} \mathrm{F} \cdot dS$$

Stokes teorem

Dersom $\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er kontinuerlig deriverbar og $\Omega \in \mathbb{R}^3$ er en glatt orientert flate med glatt rand $\partial\Omega$, er

$$\iint_\Omega \nabla \times \mathsf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{F} \cdot dS$$

Fouriertransform

Fouriertransform

Fouriertransformen til et signal x er

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Laplacetransform

Laplacetransform

Laplacetransformen til et signal x er

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt.$$