NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS - TEST I

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Dato Sign

Oppgave 1 Her ser vi at $\mathbf{F}$ er konservativt, siden

$$\mathbf{F} = \nabla g$$

der $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\cos z_3\right)$, slik at

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot ds = g(0,0,0) - g(1,1,1) = -\frac{5}{2} + \cos 1$$

Oppgave 2

a) Vi finner først jacobimatrisen til $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\,(x_1 + x_2) & 2\,(x_1 + x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G}'(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{H}'(\mathbf{z}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{z}))\mathbf{G}'(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2z_3 & 2z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Vektorfeltet er

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{z})) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_3^2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

Denne kan vi ta på to forskjellige måter. Vi får regne ut for de tre delene av sylinderens overflate. Bunnen kan parametriseres ved $\mathbf{z} : [0,1] \times [0, 2\pi]$ gitt ved

$$\mathbf{z}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

med utnormalvektor

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} = (0, 0, -r)$$

og utfluksen blir

$$\iint_{\text{Bunn}} \mathbf{H} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{H}(r\cos\theta, r\cos\theta, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}\, drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\theta + r\sin\theta)\ rdrd\theta = 0$$

Toppen kan parametriseres ved $\mathbf{z} : [0,1] \times [0, 2\pi]$ gitt ved

$$\mathbf{z}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

med utnormalvektor

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r} = (0, 0, r)$$

og utfluksen blir

$$\iint_{\text{Topp}} \mathbf{H} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{H}(r\cos\theta, r\cos\theta, 1) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial r}\, drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\theta + r\sin\theta + 1)\ rdrd\theta = \pi$$

Siden fikser vi med $\mathbf{z} : [0,1] \times [0, 2\pi]$ gitt ved

$$\mathbf{z}(h,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ h \end{pmatrix}$$

som har utnormal

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial h} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

og utfluksen blir

$$\iint_{\text{Side}} \mathbf{H} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{H}(\cos\theta, \cos\theta, h) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial h}\, dhd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta + h^2 \sin\theta\ dhd\theta = -\pi$$

Den totale utfluksen blir

$$\iint_{\text{Bunn}} \mathbf{H} \cdot dS + \iint_{\text{Topp}} \mathbf{H} \cdot dS + \iint_{\text{Side}} \mathbf{H} \cdot dS = 0 + \pi - \pi = 0$$

Merk hvordan kunnskap om ortogonaliteten til de trigonometriske funksjonene hjelper en til å slippe å regne ut masse integraler her.

Hvis du husker divergensteoremet, blir alt mye enklere, siden

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_1}{\partial z_1} + \frac{\partial H_2}{\partial z_2} + \frac{\partial H_3}{\partial z_3} = -1 + 1 = 0$$

og følgelig

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{H} \, d\mathbf{z} = 0$$

Oppgave 3 Vi begynner med å finne de kritiske puntkene. Likningssystemet

$$\nabla f = [2x - y, -x + 2y] = [0, 0]$$

har den entydige løsningen $(x, y) = (0, 0)$, og siden hessematrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

har to positive egenverdier ($\lambda = 1$ og $\lambda = 3$), må dette være et bunnpunkt, og $f(0, 0) = 0$.

Vi sjekker så randen. Her er det nok enklest å bare evaluere f på de rette linjestykkene.

For $y = 0$ er $f(x, 0) = x^2$, som har et maksimum på $x = 1$, og tilsvarende analyse fungerer for $f(0, y)$. For $y = 1$ er $f(x, 1) = x^2 - x$, som har et minimum på $x = 1/2$, og maksimum for $x = 0$ og $x = 1$. Tilsvarende analyse fungerer for $f(1, y)$, og vi ser at $f(x, y) = 1$ er maksverdi (denne oppnås i $(1, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$, mens $f(x, y) = 0$ er minimumsverdi, og oppnås i origo.

Oppgave 4 Ops her var det litt feil funksjon i oppgaveteksten, det skulle være den samme som obligen i ESDA II. Her er det lurt å bruke at f er jevn:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} \, dt &= \int_{-1}^{1} (1 - |t|) \, e^{i\omega t} \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - |t|) \cos \omega t \, dt + i \int_{-1}^{1} (1 - |t|) \sin \omega t \, dt \\
&= 2 \int_{0}^{1} (1 - t) \cos \omega t \, dt \\
&= \frac{2}{\omega}(1 - t) \sin \omega t \bigg|_0^1 + \frac{2}{w} \int_0^1 \sin \omega t \, dt = \frac{2}{w^2} (1 - \cos \omega)
\end{aligned}$$

Oppgave 5 En kule med radius 2, sentrert i origo, har massetetthet gitt ved $\rho(x, y, z) = 10 + xy$. Denne tror jeg vi kjører rett i kulekoordinater. Husk nå fra TMA4106 at $\cos\theta$ og $\sin\theta$ er ortogonale på $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \rho \, d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(10 + r^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\phi\right) r^2 \sin\phi \, d\theta d\phi dr \\ &= 10 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\phi \, d\theta d\phi dr \\ &= 10 \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{320\pi}{3}\end{aligned}$$

Oppgave 6

a) Dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, er

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right) \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) = 0\end{aligned}$$

b) Dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, er

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|^3}, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_3}{\|\mathbf{x}\|^3}, \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) \\ =& \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{x_3 x_2}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{x_2 x_3}{\|\mathbf{x}\|^5}, -\frac{x_1 x_3}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{x_1 x_3}{\|\mathbf{x}\|^5}, -\frac{x_2 x_1}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{x_1 x_2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right) = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

c) Finn arbeidet feltet gjør på en annen partikkel med ladning q som beveger seg fra punktet $(1, 1, 1)$ til $(1, 2, 3)$. Her er det bare å huske at elektrisk felt er konservativt med potensialfunksjon

$$\nabla V = \mathbf{E}$$

gitt ved

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$$

slik at

$$\begin{aligned} q\int_\Gamma \mathbf{E}\cdot ds &= q\left(V(1,2,3) - V(1,1,1)\right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\|(1,2,3)\|} - \frac{1}{\|(1,1,1)\|}\right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

d) En finfin parametrisering for enhetskuleskallet, er $\mathbf{z} : [0,\pi]\times[0,2\pi]$ gitt ved

$$z(\phi,\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi\end{bmatrix}$$

Vi beregner først

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial\phi}\times\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial\theta} = \begin{bmatrix}\cos\theta\sin^2\phi \\ \sin\theta\sin^2\phi \\ \cos\phi\sin\phi\end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}(\phi,\theta))\cdot\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial\phi}\times\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{z}(\phi,\theta)\|}\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta\sin^2\phi \\ \sin\theta\sin^2\phi \\ \cos\phi\sin\phi\end{bmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sin\phi$$

siden $\|\mathbf{z}(\phi,\theta)\| = 1$. Med andre ord er

$$\iint_{\partial\Omega}\mathbf{E}\cdot\, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\phi\; d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$