

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS - TEST II - LF**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 En flate er parametrisert ved funksjonen $\mathbf{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^{3/2} \end{bmatrix}$$

Denne er i bunn og grunn rett fram. Vi beregner først

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2} = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{x}, 0, 1 \right)$$

og så

$$\iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2} \right\| d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx dy = \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{13^3}{64}} - 1 \right)$$

Oppgave 2

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a \end{cases}$$

a) Her er det bare å anta at realdelen til s er negativ, og sette inn i definisjonen:

$$\int_0^\infty u(t - a)e^{-st} dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

b) Vi laplaser alt, bruker derivasjonsregelen, og skriver

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

som gir

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 1)}$$

Delbrøksoppspalting gir

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 1)} = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{2(s + i)} - \frac{e^{-s}}{2(s - i)}$$

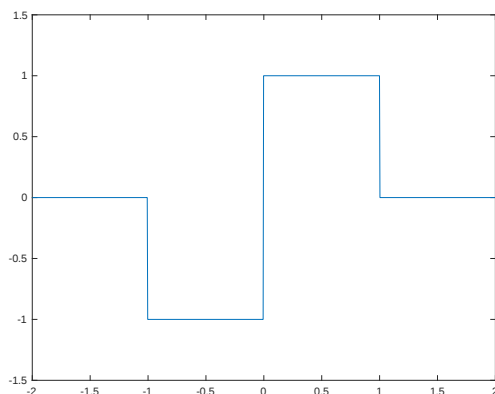
Inverstransformering ved t -skift gir

$$y(t) = u(t - 1) \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{-i(t-1)} + e^{i(t-1)} \right) \right) = u(t - 1) (1 - \cos(t - 1))$$

c) Funksjonen

$$-u(x+1) + 2u(x) + u(x-1) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

ser slik ut:



Fouriertransformen blir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-u(x+1) + 2u(x) + u(x-1)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-u(x+1) + 2u(x) + u(x-1)) e^{-iwx} dx \\ &= \left(-\int_{-1}^0 e^{-iwx} dx + \int_0^1 e^{-iwx} dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{iw} (1 - e^{iw}) + \frac{1}{iw} (1 - e^{-iw}) \right) \\ &= 2 \frac{1}{iw} (1 - \cos w). \end{aligned}$$

Oppgave 3 Skjæringskurven mellom flatene finner vi ved å sette z -verdiene lik hverandre:

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

eller

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

eller

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

En parametrisering for kurven er for eksempel

$$\mathbf{z}(\theta) = \begin{pmatrix} z_1(\theta) \\ z_2(\theta) \\ z_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ 1 + \sin \theta \\ 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Enhetstangenten blir derfor

$$\mathbf{T}(\theta) = \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\|\dot{\mathbf{z}}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(\cos \theta + \sin \theta)^2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -2 \sin \theta + 2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 Vi beregner

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + 4t^2} dt \\ &= \frac{1}{2}t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{4} \ln |2t + \sqrt{1 + 4t^2}| \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} \end{aligned}$$

Oppgave 5 Her får vi skrive

$$C = 4x^2 + 8x + 5y^2 - 10y + 9$$

som kan ryddes til

$$C = 4(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 2y + 1) = 4(x + 1)^2 + 5(y - 1)^2,$$

eller

$$1 = \frac{(x + 1)^2}{C/4} + \frac{(y - 1)^2}{C/5}$$

altså ellipser sentrert i $(-1, 1)$ med halvakser $C/4$ og $C/5$.

Oppgave 6 Gradienten til f er

$$\nabla f = [6x, 2y - 1]$$

Setter vi denne lik null, får vi

$$\nabla f = [6x, 2y - 1] = [0, 0]$$

som gir at $(0, 1/2)$ er et kritisk punkt, med funksjonsverdi

$$f(0, 1/2) = -3/4$$

Lagranges multiplikatormetode krever at vi finner gradienten til $g(x, y) = x^2 + y^2$, som er

$$\nabla g = [2x, 2y]$$

og at vi krever

$$[6x, 2y - 1] = \lambda[2x, 2y]$$

Dette blir likningssystemet

$$\begin{aligned}(3 - \lambda)x &= 0 \\ 2(1 - \lambda)y &= 1\end{aligned}$$

som har entydig løsning $x = 0$, $y = 1/(2(1 - \lambda))$ dersom $\lambda \neq 1$ og $\lambda \neq 3$. Dersom $\lambda = 1$, er det uendelig mange løsninger $(0, y)$ (dette tilfellet inneholder også det forrige), og dersom $\lambda = 3$, er det uendelig mange løsninger $(x, -1/4)$. Av alle disse punktene ligger $(0, \pm 2)$ og $(\pm\sqrt{63}/4, -1/4)$ på kurven $x^2 + y^2 = 4$. Setter vi disse inn f , får vi henholdsvis 2, 6, 12. Den største verdien til f er altså 12, som oppnås i $(\pm\sqrt{63}/4, -1/4)$, mens den minste er $-3/4$, som oppnås i $(0, 1/2)$.

Oppgave 7

a) Lett! $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$, så divergensteoremet gir at arbeidet blir

$$\iiint_{\partial\mathcal{T}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \nabla \cdot \mathbf{F} = 3 \cdot 1 = 3$$

siden volumet av tetraederet er 1.

b) Lett! $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, så Stokes' teorem arbeidet blir null:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} = 0$$