NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Anta at realdelen til s er positiv. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) &= \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\pi^\infty e^{-st} \cos t\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\pi^\infty e^{-st} \left(e^{it} + e^{-it} \right)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\pi^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(i-s)\pi}}{s-i} + \frac{e^{-(i+s)\pi}}{s+i} \right) \\
&= -\frac{e^{-\pi s}}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = -\frac{s e^{-\pi s}}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

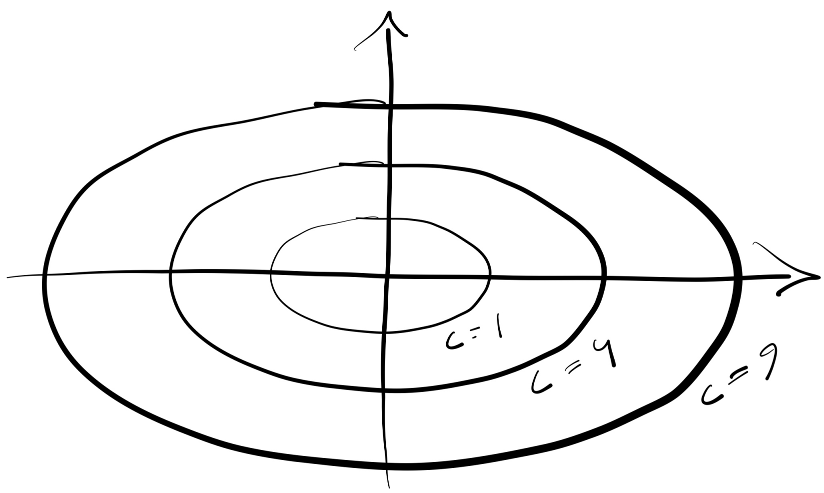
Oppgave 2 Vi beregner

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Oppgave 3 Vi vil ha kurver på formen $c = 4x^2 + 5y^2$. Her er det greit å skrive om til

$$1 = \frac{x^2}{\left(\sqrt{c/4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{c/5}\right)^2}$$

slik at det blir lett å se at kurvene er ellipser med halvakser $\sqrt{c/4}$ og $\sqrt{c/5}$, sentrert i origo.



Oppgave 4 Vi beregner først gradienten til f:

$$\nabla f(x, y) = [2x + y - 1, x + 2y - 1]$$

og når vi leter etter punkter der denne er null, får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

som har den entydige løsningen $x = y = \frac{1}{3}$. Dette er det eneste kritiske punktet, og hessematrisen i punktet er

$$f''\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

som har egenverdier 1 og 3. Siden alle egenverdiene er positive, må det kritiske punktet være et bunnpunkt.

Oppgave 5

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a) Her er det enklest å bruke divergensteoremet. Siden $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$ og $\mathcal{T}$ er en pyramide med grunnflateareal 1 og høyde 3, får vi

$$\iint_{\partial \mathcal{T}} \mathbf{F} \cdot d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{T}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = 1$$

b) Her er det enklest å bruke Stokes teorem, siden $\nabla \times \mathbf{F} = (0, -2, 0)$ er konstant og flaten er et plan. En enkel parametrisering for flaten er $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$ der

$$\mathbf{z}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 3 - 3y_1 - 3y_2/2 \end{bmatrix}$$

og D er gitt ved ulikhetene $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ og $y_1 + y_2/2 \leq 1$. Vi beregner først

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(som peker ut av $\mathbf{T}$), og så

$$\nabla \times \mathbf{F}\left(\mathbf{z}(\mathbf{y})\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{z}(\mathbf{y})\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_2}\, d\mathbf{y} = \iint_D 2\, d\mathbf{y} = 2$$

Dette betyr at $\mathbf{F}$ gjør arbeidet 2 dersom en partikkel reiser rundt $\mathcal{C}$ mot klokken sett utenfra, og arbeidet -2 dersom partikkelen går motsatt vei.

Oppgave 6 Det elektriske feltet fra en punktladning q plassert i origo er

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3},$$

der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, er

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) \\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|^3} \\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3\frac{x_k^2}{\|\mathbf{x}\|^5}\right) \\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|^3}\right) = 0
\end{aligned}$$

b) En finfin parametrisering for enhetskuleskallet, er $\mathbf{z} : [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ gitt ved

$$z(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

Vi beregner først

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin^2\phi \\ \sin\theta \sin^2\phi \\ \cos\phi \sin\phi \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}(\phi,\theta))\cdot\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\phi}\times\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{z}(\phi,\theta)\|}\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta\sin^2\phi\\ \sin\theta\sin^2\phi\\ \cos\phi\sin\phi\end{bmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sin\phi$$

siden $\|\mathbf{z}(\phi,\theta)\| = 1$. Med andre ord er

$$\iint_{\partial\Omega}\mathbf{E}\cdot\ dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\ d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Oppgave 7 Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-a|x|}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\omega x}\ dx\\ &= \int_0^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\omega x}\ dx\\ &= \int_0^{\infty} e^{-x(a+i\omega)}\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\omega)}\ dx\\ &= \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\end{aligned}$$

Oppgave 8 La oss først få dette over på funksjonsform. Den øverste halvkulen i det nederste kuleskallet beskrives av funksjonen

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

mens den nederste halvkulen i det øverste kuleskallet beskrives av funksjonen

$$g(x,y) = 1-\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

og høyden mellom disse kuleskallene som en funksjon av x og y er

$$h(x,y) = f(x,y) - g(x,y) = 2\sqrt{1-x^2-y^2} - 1.$$

Skjæringskurven mellom kuleskallene er $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$, siden

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = 1-\sqrt{1-x^2-y^2} \quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2 = \frac{3}{4}$$

og vi må derfor integrere h over projeksjonen av området $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ i xy-planet. Det gjøres enklest i polarkoordinater:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} h(x,y)\, dydx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(2\sqrt{1-r^2} - 1\right)\, rdrd\theta \\ &= 2\pi \left(-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{1}{2}r^2 \Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{3}/2} \right) = \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$