Dere har tidligere sett laplacetransformasjoner, hvor vi puttet en funksjon $x(t)$ inn i et visst integral og fikk en ny funksjon

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt.$$

Vi hadde diverse regneregler, som for $\mathcal{L}(\dot{x})$, $\mathcal{L}(\ddot{x})$, t-shift, og s-shift. Vi hadde også en inversformel for transformasjonen, selv om vi ikke brukte den så mye i praksis.

Alt dette var fint fordi vi kunne bruke laplacetransformasjon til å løse diffligninger veldig lett.

Men laplacetransformasjonen var egentlig bare et eksempel på det mer generelle fenomenet integraltransformasjon.

Den generelle idéen med å bruke integraltransforsjoner er akkurat som det vi har brukt laplacetransformasjoner til:

- Vi har et problem som er vanskelig å løse direkte
- Putt hele problemet inn i en integraltransformasjon (hvilken transformasjon kommer an på situasjonen)
- Vi ender opp med et problem som (forhåpentligvis) er lettere å løse
- Løs den lette versjonen av problemet
- Bruk inversen til transformasjonen på løsningen for å finne løsningen på originalproblemet.

Den spesifikke integraltransformasjonen vi skal se på nå er fouriertransformasjon.

Som navnet antyder så vil fourierrekker være relevante her, så tar en kjapp repetisjon:

En funksjon $f(t)$ er T-periodisk hvis $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Vi begrenser f til fundamentalperioden sin, altså $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (har også sett $[0,T]$ brukt for dette).

Så vi har en funksjon $f: [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \longrightarrow \mathbb{C}$. Fourierrekken til f på eksponensiell form er

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t}$$

hvor fourierkoeffisientene c_n er gitt av

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\,dt$$

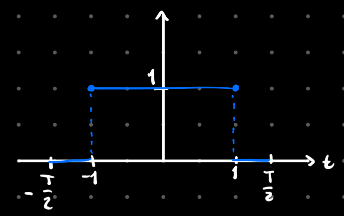
Det fantes også en trigonometrisk form og en fase-amplitude form for fourierrekken.

Vi har tidligere holdt oss til $T=2\pi$ for at formlene skulle være litt enklere å jobbe med i starten.
Når vi bruker en generell T i stedet, så kan noen utregninger bli litt mer jobb. Men ellers er alt som før.

0 Finn fourierrekken til $y : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

for alle $T > 2$, og lag et plot av både y og fourierrekken på intervallet $[-T, T]$ for noen forskjellige verdier av T. Hva konvergerer fourierrekken til i $t = 1$?



Vi regner ut fourierkoeffisientene:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\, e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\left[-\frac{T}{2\pi i n}\, e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\left(-\frac{\cancel{T}}{2\pi i n}\right)\left[e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i n}\left(e^{-\frac{2\pi i n}{T}} - e^{\frac{2\pi i n}{T}}\right) = \frac{1}{\pi n}\left(\underbrace{\frac{e^{\frac{2\pi n}{T}i} - e^{-\frac{2\pi n}{T}i}}{2i}}_{=\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\pi n}$$

Denne utregningen funker bare når $n \neq 0$ (siden vi ender opp med n i nevneren), så regn c_0 separat:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\, e^{0}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} 1\, dt = \frac{1}{T}\left[t\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)}{T} = \frac{2}{T}$$

Husk: sin er odde, $\sin(-x) = -\sin(x)$

Merk også at for $n > 0$ har vi: $c_{-n} = \dfrac{\sin\left(-\frac{2\pi n}{T}\right)}{-\pi n} = -\left(-\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\pi n}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\pi n} = c_n$

Da har vi også: $c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t} + c_{-n} e^{-\frac{2\pi i n}{T}t} = c_n\left(e^{\frac{2\pi n t}{T}i} + e^{-\frac{2\pi n t}{T}i}\right) = 2c_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$

Dermed blir fourierrekken:

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t} = \frac{2}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t} + c_{-n} e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}\right) = \frac{2}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$= \frac{2}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

Gidder ikke skrive en kode her, men kan legge ut en kode på wikien hvis noen ber om det.

Uansett, hvis du har skrevet en grei kode burde det være en smal sak å regne ut hva partialsummene ser ut til å konvergere mot i $t=1$ (for diverse verdier av T og den øvre grensa i partialsummen).

Fra mine utregninger, så ser det ut som fourierrekken konvergerer mot 0.5 når $t=1$.

En begrensning med å jobbe med fourierrekker, er at de bare kan representere periodiske funksjoner.

Vi vil utvikle idéene så langt for å kunne jobbe med ikke-periodiske funksjoner også.

Idéen er å starte med en T-periodisk funksjon $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{C}$, skrive opp fourierrekken til f, og så til slutt la $T \to \infty$.

Upresist sagt får vi da "fourierrekken" til en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med "periode" ∞.

Start med å skrive opp fourierrekken til $f: [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \to \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-\frac{2\pi i n}{T} s} ds \right) e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-\frac{2\pi i n}{T} s} ds \right) e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$$ [gang med $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$]

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-\frac{2\pi i n}{T} s} e^{\frac{2\pi i n}{T} t} ds \right) \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{\frac{2\pi n}{T} i(t-s)} ds \right) \frac{2\pi}{T}$$

La $\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}$ og $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T}$, da får vi

$$\dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{\lambda_n i(t-s)} ds \right) \Delta\lambda$$

Merk at $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{T} \to 0$ når $T \to \infty$.

Nå ser du forhåpentligvis at dette kan tolkes som en riemannsum, hvor λ_n og $\Delta\lambda$ beskriver stegene og lengdene.

Hvis vi nå lar $T \to \infty$ blir riemannsumme til et integral, og vi ender opp med.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\lambda i s} ds \right) e^{\lambda i t} d\lambda$$

Dermed blir dette "fourierrekken" til $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med "fourierkoeffisient"

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\lambda i s} ds$$

Og denne "koeffisienten" er fouriertransformasjonen til f.

minner om $\mathcal{L}(f)$

OBS 1 : Det er mye forskjellige notasjoner for fouriertransformasjonen. Eks. $\hat{f}(\lambda)$, $F(\lambda)$, $\check{X}(\lambda)$, $\mathcal{F}(f)$, ...
Så ikke bli overrasket hvis du slår opp i en annen bok/nettside og ser noe rart.

OBS 2 : Det varierer også om $\frac{1}{2\pi}$ dukker opp formelen til $\hat{f}(\lambda)$ eller ikke, og noen steder brukes $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ i stedet på grunn av symmetriargumenter.

Det kommer av at det varierer hva man vil at λ skal representere, men dette kan ikke jeg så mye om så jeg utdyper ikke mer nå. Bare vær klar over at det er litt andre varianter av formelen for $\hat{f}$ ute og går.

Dersom f er "grei" nok (e.g. ikke det som skjedde i oppg. $\boxed{0}$ i $t=1$) kan vi bruke "=" i stedet for "~".
Da kan vi skrive

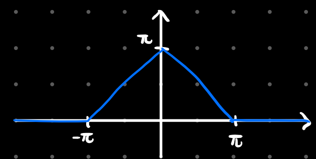
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

og dette funger da som inverstransformasjonen til $\hat{f}$.

$\boxed{1}$ Finn fourieromvendingen til

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \le \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

og sammenlikne med en av eksamensoppgavene i TMA4106.
(Hint: det er nok letteste om du skriver $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.)



$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|t|)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cancel{\pi}e^{-i\omega t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-|t|e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \overset{v}{t}\,\overset{u'}{e^{-i\omega t}}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \overset{v}{t}\,\overset{u'}{e^{-i\omega t}}\,dt$$

↳ når $t<0$ er $|t| = -t$

$$= -\frac{1}{2i\omega}\left(e^{-i\omega\pi} - e^{i\omega\pi}\right) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-i\omega}\,t\,e^{-i\omega t}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(-i\omega)}\int_{-\pi}^{0} e^{-i\omega t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-i\omega}\,t\,e^{-i\omega t}\right]_{0}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(-i\omega)}\int_{0}^{\pi} e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}}{2i} + \underline{\frac{1}{2\cancel{\pi}}\left(0 - \frac{\cancel{\pi}}{i\omega}e^{i\omega\pi}\right)} + \frac{1}{2\pi i\omega}\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-\pi}^{0} - \underline{\frac{1}{2\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{-i\omega}e^{-i\omega\pi} - 0\right)} - \frac{1}{2\pi i\omega}\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} \underline{- \frac{1}{2i\omega}e^{i\omega\pi} + \frac{1}{2i\omega}e^{-i\omega\pi}} + \frac{1}{2\pi i\omega}\left(\frac{1}{-i\omega} - \frac{1}{-i\omega}e^{i\omega\pi}\right) - \frac{1}{2\pi i\omega}\left(\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega\pi} - \frac{1}{-i\omega}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\sin(\omega\pi)}{\omega}} - \cancel{\frac{\sin(\omega\pi)}{\omega}} + \frac{1}{2\pi\omega^2} - \frac{1}{2\pi\omega^2}e^{i\omega\pi} - \frac{1}{2\pi\omega^2}e^{-i\omega\pi} + \frac{1}{2\pi\omega^2}$$

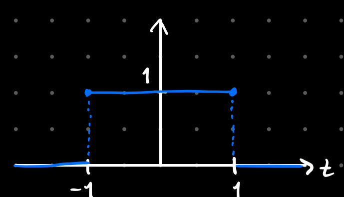
$$= \frac{1}{\pi\omega^2} - \frac{1}{\pi\omega^2}\cdot\frac{e^{i\omega\pi} + e^{-i\omega\pi}}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi\omega^2}\left(1 - \cos(\omega\pi)\right)}}$$

$\boxed{2}$ Finn fourieromvendingen til $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

og sammenlikne med oppgave 0.



$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{-2\pi i\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right) = \frac{1}{\pi\omega}\cdot\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = \underline{\underline{\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}}}$$

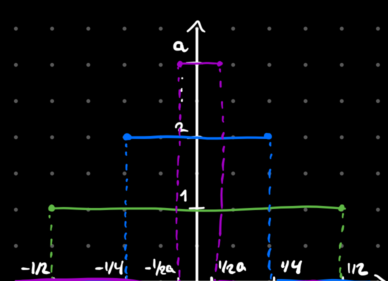
Vi ser dette ligner på $c_n = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\pi n}$ (for $n \neq 0$) fra oppg. $\boxed{0}$.

Så dette passer med idéen om at $\hat{x}(\omega)$ er "fourierkoeffisienten" i dette tilfellet.

$\boxed{3}$ Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \ge 1/2a \end{cases}$$

Hva skjer med fourieromvendingen når $a \to \infty$?



$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2a}^{1/2a} a e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1/2a}^{1/2a}$$

$$= \frac{a}{\pi\omega}\cdot\frac{e^{\frac{\omega}{2a}i} - e^{-\frac{\omega}{2a}i}}{2i} = \underline{\underline{\frac{a}{\pi\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2a}\right)}}$$

Når $a \longrightarrow \infty$: $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2a}^{1/2a} a e^{-i\omega t}\,dt = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a}{\pi\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2a}\right) = \frac{1}{\pi\omega}\lim\limits_{a\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2a}\right)}{1/a}$

l'Hôpital

$$= \frac{1}{\pi\omega}\lim_{a\to\infty}\frac{-\frac{\omega}{2a^2}\cos\left(\frac{\omega}{2a}\right)}{-\frac{1}{a^2}}$$

OBS: derivasjonene er gjort mhp a (selv om det er ω som er variabelen i $\hat{f}(\omega)$). Det er fordi l'Hôpital sier $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Altså tallet/variabelen vi lar gå mot ∞ (i dette tilfellet) er det vi må derivere mhp.

$$= \frac{1}{\pi\omega}\lim_{a\to\infty}(-a^2)\cdot\left(-\frac{\omega}{2a^2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega}\lim_{a\to\infty}\frac{\omega}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega}\cdot\frac{\omega}{2}\cdot 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}}}$$

4 Finn fourieromvendingen til diracpulsen.

Dirac-delta "funksjonen" kan tolkes som $\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

Hvis du stirrer litt på tegningen av grafen til $f(t)$ i forrige oppgave, så skjønner du forhåpentligvis at

$$\delta(t) = \lim_{a\to\infty} f(t) \qquad \text{hvor} \qquad f(t) = \begin{cases} a & |t| \leq 1/2a \\ 0 & 1/2a < |t| \end{cases}$$

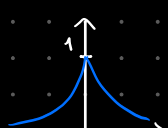
Dermed har vi fra forrige oppgave at $\hat{\delta}(t) = \lim\limits_{a\to\infty}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$.

En kjekk ting å huske er at integralet når man regner ut $\hat{\delta}(t)$ (altså se bort fra $\frac{1}{2\pi}$ konstanten) er bare 1.

Mer generelt har vi at for $a \in \mathbb{R}$, så er $\hat{\delta}(t-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega a}$.

5 Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = e^{-a|t|}$$



Anta $a > 0$ for å holde notasjonen enkel.

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\cdot e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-(a+i\omega)}e^{-(a+i\omega)t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a-i\omega} - 0 - 0 + \frac{1}{a+i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(a+i\omega)+(a-i\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \underline{\underline{\frac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}}}$$

Husk at formelen for inverstransformasjonen er

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

Dette ligner jo på definisjonen på fouriertransformasjonen til $\hat{f}(\omega)$ (altså transformasjonen til transformasjonen til $f(t)$).

Med notasjonen vi bruker så er forskjellene mangel på $\frac{1}{2\pi}$ og mangel på minus i eksponenten.

En annen måte å skrive dette på da blir

$$f(t) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega(-t)} \, d\omega = 2\pi \cdot \mathcal{F}(\hat{f})(-t)$$

En annen nyttig ting å vite før neste oppgave er at fouriertransformasjonen (og inverstransformasjonen) er lineære siden riemannintegraler er lineære:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t)) e^{-i\omega t} \, dt \\
&= a \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt + b \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} \, dt \\
&= a \mathcal{F}(f(t)) + b \mathcal{F}(g(t))
\end{aligned}$$

6 Finn fourieromvendingen til

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

La $g(t) = e^{-a|t|}$ (altså funksjonen fra forrige oppgave).

Vi har $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + \omega^2}$ og $g(t) = 2\pi \cdot \mathcal{F}(\hat{g}(\omega))(-t)$.

Siden $g(-t) = g(t)$, blir den siste likheten bare $g(t) = 2\pi \cdot \mathcal{F}(\hat{g}(\omega))(t)$.

Merk nå at vi har $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{a} \hat{g}(t)$.

Dermed får vi: $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{a} \hat{g}(t)\right) = \frac{\pi}{a} \mathcal{F}(\hat{g}) = \frac{1}{2a} \cdot 2\pi \mathcal{F}(\hat{g}) = \frac{1}{2a} g(\omega) = \underline{\underline{\frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}}}$

Det er lett å se, men allikevel viktig. En mindre innlysende, men veldig viktig regneregel er:

$$\mathcal{F}(\dot{x}) = iw\mathcal{F}(x)$$

8 Vis dette (hint: delvis integrasjon). Hva må du anta om x for at formelen skal gjelde?

Vi bruker delvis integrasjon:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\dot{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{u'}{\dot{x}(t)} \overset{v}{e^{-i\omega t}} \, dt = \frac{1}{2\pi} \left[x(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \cdot (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \mathcal{F}(x)
\end{aligned}$$

For å få formelen vi er ute etter trenger vi at $\frac{1}{2\pi}\left[x(t)\,e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$

Og for at det skal skje trenger vi at $x(t) \longrightarrow 0$ når $|x| \longrightarrow \infty$.

For at bruken av integraler her skal gi mening, trenger vi også at $x(t)$ og $\dot{x}(t)$ er integrerbare.
Selvfølgelig må $x(t)$ være deriverbar.

[Tror det var alt, men kan være jeg har misset noe. Man kan være mer detaljert her, men da må vi fort begynne å rote med Lebesgue integrasjon. Det viktigste her er nok å huske at vi må være litt obs på hvilke funksjoner vi prøver å bruke formelen på.]

Naturligvis kan du også utlede en formel for $\mathcal{F}(\ddot{x})$. Og disse er da nyttig å kunne for å løse diffligninger lett.

$\boxed{9}\ \mathcal{F}\{x(t-\theta)\} = e^{-i\omega\theta}X(\omega)$ $\boxed{10}\ \mathcal{F}\{e^{i\theta t}x(t)\} = X(\omega-\theta)$ $\boxed{11}\ \mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Tidsskift: $\mathcal{F}(x(t-\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega\theta}\cdot e^{i\omega\theta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)e^{-i\omega t}\,dt$

$$= e^{-i\omega\theta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)e^{-i\omega(t-\theta)}\,dt$$

Substitusjon: La $s = t-\theta \Rightarrow ds = dt - 0 = dt.$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x(t-\theta)) = e^{-i\omega\theta}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,e^{-i\omega s}\,ds = e^{-i\omega\theta}\mathcal{F}(x)$$

Frekvensskift: $\mathcal{F}(e^{i\theta t}x(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}x(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-i(\omega-\theta)t}\,dt = \mathcal{F}(x(t))(\omega-\theta) = \hat{x}(\omega-\theta)$

Tidsskalering: $\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\,e^{-i\omega t}\,dt$

Substitusjon: La $s = at \Rightarrow ds = a\,dt \Rightarrow dt = \frac{ds}{a}$

Hvis $a > 0 \Rightarrow \mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\,e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,e^{-i\omega\frac{s}{a}}\,\frac{ds}{a}$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,e^{-i\frac{\omega}{a}s}\,ds = \frac{1}{a}\mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Hvis $a < 0$: Vi må være litt forsiktig med grensene i integralet.

$$\lim_{T\to\infty}\int_{t=-T}^{t=T}\dots\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{s=-aT}^{s=aT}\dots\,dt$$

Siden $a < 0$ har vi $aT < 0 < -aT$. Vanligvis foretrekker vi å la grensene i integraler gå fra minst til størst verdi, så vi kan snu integralet med

$$\int_a^b\dots = -\int_b^a\dots$$

Altså når $a<0$ har vi

$$\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} x(s)\, e^{-i\frac{\omega}{a}s}\, ds$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, e^{-i\frac{\omega}{a}s}\, ds$$

$$= \frac{1}{-a}\mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Vi ser bort fra $a=0$, siden vi da bare ser på fouriertransformasjonen til $x(0)$, en konstantfunksjon.

Totalt sett har vi da $\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(x)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Flere av oppgavene som er igjen handler om ting jeg foreløpig ikke er så stødig i (impulsrespons, sannsynlighetsfordeling, sannsynlighetstetthet). Så jeg går ikke gjennom resten av oppgavene (med mindre noen ber om noe annet).

Men jeg kan avslutte med en liten gjennomgang av konvolusjon:

Konvolusjon er en operasjon som tar to funksjoner f og g, og produserer en ny funksjon $f*g$ definert som:

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds.$$

Noen regneregler:
- Kommutativt: $f*g = g*f$
- Assosiativt: $f*(g*h) = (f*g)*h$
- Distributivt: $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$
- Assosiativt med skalarmult.: $a(f*g) = (af)*g$
- Komplekskonjugering: $\overline{f*g} = \bar{f}*\bar{g}$
- Derivering: $(f*g)' = f'*g = f*g'$

Grunnen til at vi bryr oss om konvolusjon når vi jobber med fouriertransformasjoner er følgende:

Konvolusjonsteoremet: Hvis f og g har fouriertransformasjoner, da har vi

$$\mathcal{F}(f*g) = 2\pi\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

<u>Bevis:</u> $\mathcal{F}(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds\; e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, e^{-i\omega t}\, dt\, ds \qquad \text{[bytt rekkefølge på integrasjonene]}$$

Substitusjon: La $u = t-s$ (for å substituere bort t)

$\Rightarrow \quad du = dt$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f*g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(u)\,e^{-i\omega(u+s)}\,du\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{-i\omega s}\,g(u)\,e^{-i\omega u}\,du\,ds$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,e^{-i\omega u}\,du$$

$$= 2\pi\, \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) \qquad \blacksquare$$

Fun fact: et lignende resultat gjelder for laplace transformasjonen

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g).$$