Litt klassisk mekanikk

1 Bruk laplacetransform til å løse initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0,$$

og tegn opp minst to helt forskjellige fysiske systemer som modelleres av denne differensiallikningen. (Hvis du kommer på noe annet enn RLC-krets og støtdemperen på en bil, må du gi meg beskjed.)

Repetisjon: Laplacetransformasjonen til $x(t)$ er funksjonen

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Dirac delta: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

Heaviside funksjonen: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Regneregler:

- Lineært: $\mathcal{L}(ax(t) + by(g)) = a\mathcal{L}(x) + b\mathcal{L}(y)$
- Derivert: $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$
- 2. derivert: $\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$
- $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$
- t-shift: Huis $g(t) = f(t-a)\,u(t-a)$, $\mathcal{L}(f) = F$, og $\mathcal{L}(g) = G$ $\Rightarrow$ $G(s) = e^{-as}F(s)$
- s-shift: Huis $g(t) = e^{at}f(t)$, $\mathcal{L}(f) = F$, og $\mathcal{L}(g) = G$ $\Rightarrow$ $G(s) = F(s-a)$

Utregning av oppgaven: $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t)) = \mathcal{L}(\delta(t-1)) = e^{-s}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\ddot{x}(t)) + \mathcal{L}(\dot{x}(t)) + \mathcal{L}(x(t)) = e^{-s}$

$\Rightarrow (s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx(0) - \dot{x}(0)) + (s\mathcal{L}(x(t)) - x(0)) + \mathcal{L}(x(t)) = e^{-s}$

$\Rightarrow s^2\mathcal{L}(x(t)) + s\mathcal{L}(x(t)) + \mathcal{L}(x(t)) = e^{-s}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) \cdot (s^2 + s + 1) = e^{-s}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 + s + 1}$

Siden telleren er av formen e^{-as} (her har vi $a=1$), vil jeg bruke t-skift for å finne inverstransformasjonen.

Da må jeg først vite $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$, så vi gjør følgende:

$$\frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Og slår du opp i en tabell for laplace transformasjoner så kan du finne formelen

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\sin(bt)\right) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

Dermed får vi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Og ved å bruke t-skift på $\mathcal{L}(x(t)) = \frac{e^{-s}}{s^2+s+1}$ får vi da

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{(t-1)}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) u(t-a)}}$$

9 En brugde svømmer langs kurven

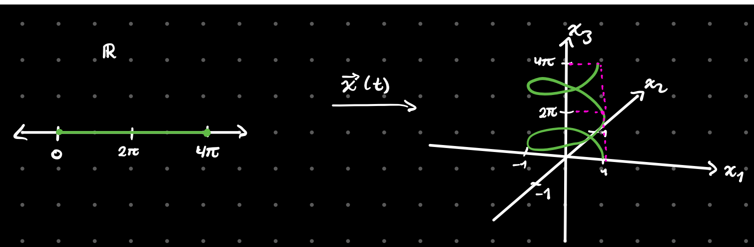
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 4\pi$$

En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft på brugden gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finn det totale arbeidet som gjøres på brugden.

Greg Skomal / NOAA Fisheries Service



$\vec{x}(t)$ beskriver en spiral som går to ganger om x_3-aksen, med konstant radius 1.

Brugden beveger seg langs kurven beskrevet av $\vec{x}(t)$ og $\vec{F}(\vec{x})$ beskriver kraft utøvd på brugden.

Altså for hvert punkt på kurven $\vec{x}(t)$ har vi en vektor $\vec{F}(\vec{x}(t))$ som beskriver kraften på brugden i det punktet.

For å finne den totale kraften på brugden må vi summere alle verdier $\vec{F}(\vec{x}(t))$ langs hele kurven, altså vi må regne ut kraften med et linjeintegral.

Vi har: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{F}(\vec{x}(t)) = \begin{bmatrix} x_3(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix} = -t\sin(t)$$

$$\Rightarrow \quad W = -\int_0^{4\pi} -\overset{v}{t}\,\overset{u'}{\sin(t)}\,dt = \Big[-t\cos(t)\Big]_0^{4\pi} + \int_0^{4\pi} \cos(t)\,dt$$

$$= -4\pi\cos(4\pi) + 0 + \underbrace{\Big[\sin(t)\Big]_0^{4\pi}}_{=0}$$

$$= -4\pi$$