Mer dobbeltintegral

Det er ganske mange oppgaver i denne ERT-filen, så jeg gjør bare noen av dem nå. Si ifra hvis det er noen oppgaver du virkelig vil se. :)

$\boxed{2}$ La

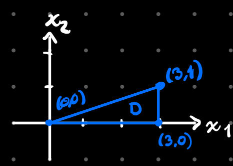
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

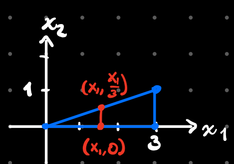
der D er trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,1)$. Forklar at

$$\int_0^3 \int_0^{x_1/3} f(x_1, x_2)\, dx_2x_1 = \int_0^1 \int_{3x_2}^3 f(x_1, x_2)\, dx_1x_2$$



Merk først at linjen gjennom (0,0) og (3,1) beskrives av $x_2 = \frac{1}{3}x_1$ eller $x_1 = 3x_2$.
Vi har to måter å sette opp integralet på:

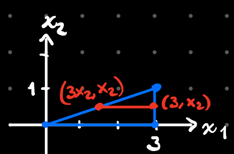
① Vi lar x_1 verdiene gå over $[0,3]$. For en vilkårlig $x_1 \in [0,3]$ kan vi da se på en vertikal flis i trekanten for denne x_1-verdien. Denne flisen vil ha nedre x_2-verdi 0. Toppen av flisen er på linjen gjennom (0,0) og (3,1), så vi bruker én av ligningene over for å bestemme x_2. Siden x_1 er valgt, blir da den øvre x_2-verdien $\frac{1}{3}x_1$.



Dermed blir grensene i integralet $[0,3]$ for x_1 og $[0, \frac{x_1}{3}]$ for x_2. Siden den ene grensen til x_2 avhenger av x_1 er vi nødt å ha integralet for x_2 innerst.

$\Rightarrow$ integralet blir $\int_0^3 \int_0^{x_1/3} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$.

② Vi lar x_2 gå over $[0,1]$. Da ser vi i stedet på horisontale fliser av trekanten. For $x_2 \in [0,1]$ er den øvre x_1-verdien alltid 3, mens den nedre blir $3x_2$ (fra ligningen over).
Nå er det en av grensene til x_1 som avhenger av x_2, så integralet til x_1 må være innerst.



$\Rightarrow$ integralet blir $\int_0^1 \int_{3x_2}^3 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$.

Begge disse måtene er legitime måter å regne ut $\iint_D f(\vec{x})\, d\vec{x}$ på, så de to integralene må være like.

For å regne ut $\iint_D f\, d\vec{x}$ er det da bare å velge seg én av disse og kjøre på:

$$\iint_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_0^1 \int_{3x_2}^3 x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 \left[\frac{x_1^3}{3} + x_1x_2^2 + \frac{x_1^2x_2}{2} + x_1 \right]_{x_1 = 3x_2}^{x_1 = 3} dx_2$$

$$= \int_0^1 9 + 3x_2^2 + \frac{9}{2}x_2 + 3 - 9x_2^3 - 3x_2^3 - \frac{9}{2}x_2^3 - 3x_2\, dx_2$$

$$= \int_0^1 -\frac{33}{2}x_2^3 + 3x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 + 12\, dx_2$$

$$= \left[-\frac{33}{8}x_2^4 + x_2^3 + \frac{3}{4}x_2^2 + 12x_2 \right]_0^1$$

$$= -\frac{33}{8} + 1 + \frac{3}{4} + 12 = \underline{\underline{\frac{77}{8}}}$$

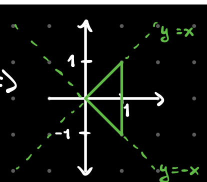
3 Skisser integrasjonsområdet og regn ut

$$\int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1}(x+2y)\,dx\,dy.$$

(Hint: du må kanskje bytte integrasjonsrekkefølge.)

$-1 \le y \le 1$

$|y| \le x \le 1$ $\Rightarrow$



På den nedre grensen til x har vi $|y| = x$.
Når $y \ge 0$ blir det $y = x$ og denne linjen er da en av avgrensingene til integrasjonsområdet. Når $y \le 0 \Rightarrow |y| = -y = x \Rightarrow y = -x$ og denne linjen er også en avgrensning.

For å bytte integrasjonsrekkefølge ser vi først at det minste x kan være er 0. Vi vet $x \le 1$. Så vi lar x gå fra 0 til 1. Linjene vi beskrev gir oss direkte at grensene til y må være $-x$ og x.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{1} x+2y\ dx\,dy = \int_0^1\int_{-x}^{x} x+2y\ dy\ dx = \int_0^1\left[xy+y^2\right]_{y=-x}^{y=x} dx = \int_0^1 x^2+x^2-(-x^2)-x^2\ dx$$

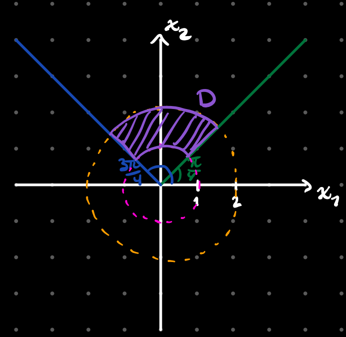
$$= \int_0^1 2x^2\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}$$

7 Et område D begrenset av $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ og $1 \le r \le 2$. Skisser dette området i x_1x_2-planet, og finn arealet på en eller annen måte.
(Hint: Figuren under kan kanskje være til hjelp.)

Restriksjonen $1 \le r \le 2$ gir oss at D er innenfor sirkelen med radius 2 og utenfor sirkelen med radius 1 (begge har senter 0).
D er altså en bit av en annulus (slå det opp hvis det trengs).

$\theta = \frac{\pi}{4}$ beskriver alle punkter som har vinkel $\frac{\pi}{4}$ til den positive x-aksen. Så $\frac{\pi}{4} \le \theta$ betyr alle punkter i D må ha større vinkel enn $\frac{\pi}{4}$ til x-aksen. Og $\theta \le \frac{3\pi}{4}$ gir på lignende vis en øvre grense.

D blir dermed hele området som er fylt inn på bildet $\longrightarrow$



Da er det egentlig lett å regne arealet til D:
Sirkelen med radius 2 har areal $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$
Sirkelen med radius 1 har areal $\pi \cdot 1^2 = \pi$

Annulusen har areal lik arealet til den store sirkelen minus arealet til den lille sirkelen $\Rightarrow 4\pi - \pi = 3\pi$.

Vi ser på biten av annulusen mellom vinkel $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{3\pi}{4}$, altså vi har en vinkel på $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Dette gjenkjenner vi som en fjerdedel av en full omdreining.
Altså D er en fjerdedel av annulusen (det er forhåpentligvis også synlig på bildet).

$\Rightarrow$ arealet til D = $\underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$.

$\boxed{8}$ La

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) \\ x_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

og regn ut **jacobideterminanten**

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

og forklar hvorfor arealet er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\, dr d\theta$$

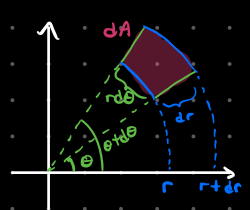
(Sikkert lurt å lete etter svaret i Adams.)

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Husk: $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

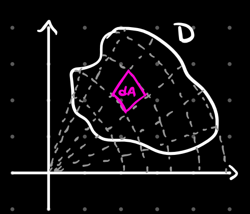
$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(J(\vec{x})) &= \cos\theta \cdot r\cos\theta - \sin\theta \cdot (-r\sin\theta) \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= r \cdot 1 \\ &= r \end{aligned}$$

Areal i polarkoordinater: Vi har et område D i $\mathbb{R}^2$ beskrevet i polarkoordinater, og vil regne ut arealet til D. Dette gjør vi ved å dele D opp i mindre biter hvor hver bit er en liten del av en annulus, som på bildet. Det fargelagte området dA er en del av D og vi vil finne arealet til dA først.



dA er tilnærmet lik rektangelet med sidelengder dr og $rd\theta$.
$rd\theta$ kommer fra lengden til den innerste sirkelbuen som avgrenser dA.

Dermed er arealet til dA $\approx dr \cdot rd\theta = r\,dr\,d\theta$



Hvis vi har gjort dette for alle småbitene av D kan vi legge sammen resultatene for å få en tilnærmet verdi for arealet til D:

$$\text{arealet til D} \approx \sum_j \sum_i r_i\, dr_i\, d\theta_j$$

Dette er en riemannsum. Vi lar nå størrelsen på bitene dA gå mot null, altså $dr_i \to 0$ og $d\theta_j \to 0$.

Dermed får vi: $\text{arealet til D} = \iint_D r\,dr\,d\theta$

Vi hadde $\vec{x}(r,\theta)$ som beskriver parameteriseringen til D, og vi fant $\det(J(\vec{x})) = r$. Siden r er i integralet vi har funnet kan vi egentlig bare putte formelen for $\det(J(\vec{x}))$ direkte inn:

$$\text{areal}(D) = \iint_D \frac{\partial x_1}{\partial r_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\, dr\, d\theta$$

Grensene vi får oppgitt beskriver området D fra forrige oppgave. Vi får:

$$\text{areal}(D) = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r \, d\theta \, dr = \int_1^2 r \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr = \int_1^2 r\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) dr = \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \, dr$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} r^2\right]_1^2 = \frac{\pi}{4}(4-1) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$$

som matcher resonnementet fra forrige oppgave!

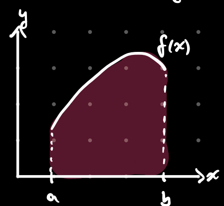
$\boxed{9}$ En ting formet som området D over har massetetthet gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Forklar at massen er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\mathbf{x}(r,\theta)) \overbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)}^{=r} dr d\theta$$

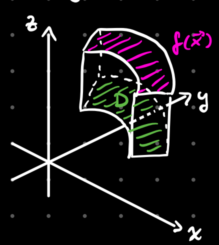
Når vi jobbet med vanlige integraler over én variabel var situasjonen følgende:



Vi har $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ hvor $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Når vi regner integralet $\int_a^b f(x)dx$ så finner vi arealet til området som er avgrenset av x-aksen, $x=a$, $x=b$, og $f(x)$.

Intuisjonen vi kan ta med oss er at definisjonsmengden vi er interessert i, $[a,b]$, beskriver grunnflaten i en 2-dimensjonal figur vi vil finne arealet til. $f(x)$ over verdiene i $[a,b]$ beskriver taket i figuren.

Når vi jobber med dobbeltintegral (uansett koordinater) er idéen den samme, men i 3 dimensjoner:



Gitt $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ for $D \subseteq \mathbb{R}^2$, så vil D beskrive grunnflaten i en 3-dimensjonal figur som vi vil vite volumet til. Bruker volum siden vi er i 3 dimensjoner. f beskriver igjen taket i figuren.

[Tegningen er litt misvisende fordi f ikke trenger å være konstant, så taket i figuren er ikke nødvendigvis flat]

For å finne formelen for volumet gjør vi følgende: Del D opp i små deler som i forrige oppgave. For hver liten del dA, se på f bare på denne biten. Velg en verdi (x^*, y^*) inne i biten dA og se på tallet $f(x^*, y^*)$. Figuren med grunnflate dA og høyde $f(x^*, y^*)$ (som er konstant) er tilnærmet lik en boks, særlig når dA er liten.

Husk: areal (boks) = areal (grunnflate) · høyde

Så vi får et estimat på volumet til boksen som: volum $\approx f(x^*, y^*) \cdot \text{areal}(dA) = f(x^*, y^*) \, r \, dr \, d\theta$.

Lar vi $dr \to 0$ og $d\theta \to 0$ vil dA gå mot et punkt (x,y) og $f(x^*, y^*)$ blir bare til $f(x,y)$ i det punktet.
Vi forventer også at formelen blir et bedre og bedre estimat på volumet når dr og $d\theta$ blir mindre.

Vi setter dette sammen. Et estimat på volumet til figuren med grunnflate D og tak $f(\vec{x})$ er gitt av

$$\text{volum} \approx \sum_i \sum_j f(x^*(r_i, \theta_j), y^*(r_i, \theta_j)) \cdot r_i \, dr_i \, d\theta_j$$

Vi har altså bare lagt sammen volumestimatene for hver del-boks.

Dette er igjen en riemannsum. La $dr_i \to 0$ og $d\theta_j \to 0$, slik at vi får:

$$\text{volum} = \iint_D f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \cdot r \, dr \, d\theta$$

Grensene i integralene kommer igjen fra D, så vi må ha en beskrivelse av D for å kunne skrive grensene.

For utregninger må vi huske at siden vi her har brukt polarkoordinater, så vil vi ha r og θ i integralet, ikke x og y. Hvis vi får oppgitt f i kartesiske koordinater, men vi vil regne integralet med polarkoordinater, da må vi oversette f til polarkoordinater med $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Vi har fått $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1$. I polarkoordinater blir dette

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + 1 \\ &= r^2 + r^2\cos\theta\sin\theta + 1 \\ &= r^2 + r^2 \cdot \tfrac{1}{2}\sin(2\theta) + 1 \\ &= r^2(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + 1 \end{aligned}$$

D er den samme som i de forrige to oppgavene, så grensene i integralet er de samme som før:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 f(\vec{x}(r,\theta)) \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 (r^2(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + 1) \cdot r \, dr d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r^3(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \Big[\frac{r^4}{4}(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + \frac{r^2}{2} \Big]_{r=1}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 4(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + 2 - \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) - \tfrac{1}{2} \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{15}{4}(1 + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)) + \frac{3}{2} \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{21}{4} + \frac{15}{8}\sin(2\theta) \, d\theta$$

$$= \Big[\frac{21}{4}\theta - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2}\cos(2\theta) \Big]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{21}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{15}{16}\Big(\underbrace{\cos(\tfrac{3\pi}{2})}_{=0} - \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0}\Big)$$

$$= \underline{\underline{\frac{21\pi}{8}}}$$

$\boxed{11}$ Regn ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

(Hint: du må antagelig slå den opp, men den står i Adams.)

Her er det store trikset å ikke se på bare integralet, men se på integralet i andre:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dx\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Vi har her et dobbeltintegral i kartesiske koordinater over hele $\mathbb{R}^2$. Vi kan greit skrive om dette til polarkoordinater:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$

Vi har sett at arealelementet $dA = dx\,dy$ blir $dA = r\,dr\,d\theta$

For å dekke hele $\mathbb{R}^2$ må grensene være $0 \le \theta < 2\pi$ og $0 \le r < \infty$

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\infty} re^{-r^2}(2\pi - 0)\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr$$

For å komme videre bruker vi substitusjon: la $u = r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$

$$\Rightarrow 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = \pi\int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi(-e^{-\infty} + 1) = \pi$$

↳ dette er egentlig $\lim_{a\to\infty} -e^{-a}$ som blir 0

Altså vi har $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \underline{\underline{\sqrt{\pi}}}$$