Symmetriske matriser

Eksamen:

> 1 Vis at dersom en matrise er hermittisk, er egenverdiene reelle og egenvektorene til to distinkte egenverdier ortogonale.

A = en kompleks $m \times n$-matrise $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Den **adjungerte** til $A = A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$

Altså A har blitt transponert og alle komponentene er blitt komplekskonjugerte.

A er **hermitisk** hvis $A^* = A$ (dette krever at A er kvadratisk, $m=n$)

- **Egenverdiene er reelle:** La A være en hermitisk $n \times n$-matrise og la x være en n-dimensjonal vektor, eller en $n \times 1$-matrise.

Ved å bruke regneregler for $(-)^*$ får vi

$$(x^* A x)^* \underset{\text{adjungert av produkt}}{=} x^* A^* (x^*)^* \underset{A \text{ hermitisk}}{=} x^* A (x^*)^* \underset{\text{adjungert to ganger}}{=} x^* A x \implies x^* A x \text{ er hermitisk}$$

Men siden x er en $n \times 1$-matrise og A er en $n \times n$ matrise, er $x^* A x$ en 1×1-matrise, eller bare et tall.

Siden "transponering" av tall ikke endrer noe, så betyr det at når $x^* A x$ er hermitisk, så reduseres det bare til å bety $\overline{x^* A x} = x^* A x$

Når et komplekst tall er lik sin egen komplekskonjugert, er tallet reelt.

$\Rightarrow x^* A x \in \mathbb{R}$. Dette holder for alle komplekse n-dimensjonale vektorer x.

La nå λ være en egenverdi for A og $v \neq \vec{0}$ være en tilhørende egenvektor, altså vi har $Av = \lambda v$

Husk: komplekst skalarprodukt av v og w er $v \cdot w = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k = \underbrace{v^* w}_{\text{matriseprodukt av } v^* \text{ og } w}$

Husk også at med denne definisjonen er dette skalarproduktet lineært i 2. komponent og antilineært i 1. komponent:

- $(\lambda v \cdot w) = \sum_{k=1}^{n} \overline{(\lambda v)_k} w_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda} \overline{v_k} w_k = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k = \overline{\lambda} (v \cdot w)$
- $(v, \lambda w) = \sum_{k=1}^{n} v_k (\lambda w)_k = \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda w_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} v_k w_k = \lambda (v \cdot w)$

Vi har: $\lambda(v\cdot v) = v\cdot(\lambda v)$ indreproduktet er lineære i 2. komponent

$= v\cdot(Av)$ $Av=\lambda v$

$= v^*Av$ skriv om til matriseproduktnotasjon

$= v^*A^*v$ A hermitisk

$= (Av)^*v$ adjungert av produkt

$= (\lambda v)^*v$ $Av=\lambda v$

$= (\lambda v)\cdot v$ skriv om til indreproduktnotasjon

$= \bar{\lambda}(v\cdot v)$ komplekst indreprodukt er konjugertlineært i 1. komponent

Siden $v\neq 0 \Rightarrow (v\cdot v)>0$ så vi kan dele begge sider på tallet $v\cdot v$

$\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}.$

Dette holder for vilkårlig egenverdi og -vektor λ og $v\neq\vec{0}$ $\Rightarrow$ alle egenverdiene til A er reelle.

- **Egenvektorene til distinkte egenverdier er ortogonale:**

La A være hermitisk og la $\lambda\neq\mu$ være to egenverdier.

Vi vet altså: $A^*=A$
$Av=\lambda v$ hvor $v\neq 0$ er en egenvektor for λ
$Aw=\mu w$ hvor $w\neq 0$ er en egenvektor for μ
$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Vi har: $\mu(v\cdot w) = v\cdot(\mu w)$ lineært

$= v\cdot(Aw)$ $Aw=\mu w$

$= v^*Aw$ skriv om

$= v^*A^*w$ A hermitisk

$= (Av)^*w$ adj. av produkter

$= (\lambda v)^*w$ $Av=\lambda v$

$= (\lambda v)\cdot w$ skriv om

$= \bar{\lambda}(v\cdot w)$ konj. lineært i 1. komp.

$= \lambda(v\cdot w)$ $\lambda\in\mathbb{R}$

Vi har altså $\lambda(v \cdot w) = \mu(v \cdot w)$ og $\lambda \neq \mu$. Altså vi har to forskjellige tall λ og μ, og når vi ganger dem med det samme tallet $v \cdot w$. Det er bare én mulighet som gjør dette mulig

$\Rightarrow$ $v \cdot w = 0$. Dette holder uansett hvilke distinkte egenverdier vi startet med

$\Rightarrow$ egenvektorene til distinkte egenverdier for A er ortogonale.