Ortogonale matriser

Eksamen:

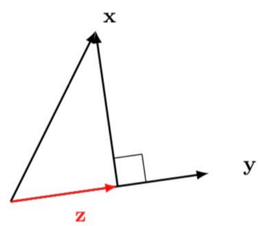
$\boxed{1}$ Vis at

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, og at

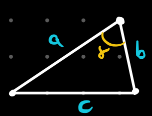
$$\mathbf{z} = \overset{P\vec{y}}{\cancel{P\mathbf{x}}} \quad \text{der} \quad P = \cancel{\frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}} \quad \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\vec{y}\cdot\vec{y}}$$

i denne figuren:



Hint for første del (fra ERT-[il]): tegn og bruk cosinussetningen.

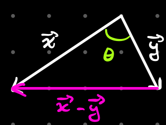
Cosinussetningen: For en vilkårlig trekant



så har vi: $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = c^2$.

La $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ være noen vektorer. Merk at de har lengde $\|\vec{x}\|$ og $\|\vec{y}\|$.

Vi tegner dem opp:



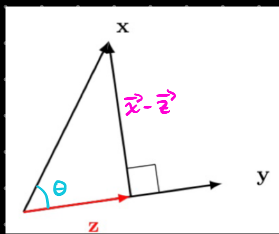
La θ være vinkelen mellom $\vec{x}$ og $\vec{y}$. Ved å tegne opp $\vec{x}-\vec{y}$ ser vi at vi får en trekant.

Ved å sette $a = \|\vec{x}\|$, $b = \|\vec{y}\|$, $c = \|\vec{x}-\vec{y}\|$, og $\gamma = \theta$ gir cosinussetningen oss

$$\begin{aligned}
\underline{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}\ \underline{-2}\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \\
&= (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) \\
&= \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} \\
&= \underline{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}\ \underline{-2}\,(x_1y_1 + x_2y_2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x_1y_1 + x_2y_2 = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta.$

For del 2, så vil vi beskrive vektoren $\vec{z}$ på bildet. På bildet ser vi at $\vec{z}$ peker i samme retning som $\vec{y}$, så vi kan forvente at vi har $\vec{z} = P\vec{y}$ for et tall P som vi nå må finne.



Merk at vektoren som står ortogonalt på $\vec{y}$ i bildet er $\vec{x}-\vec{z}$.

Vi har:
$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{x}-\vec{z})\cdot\vec{y} \\ &= \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{z}\cdot\vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta - \|\vec{z}\|\,\|\vec{y}\|\overbrace{\cos 0}^{=1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\vec{z}\|\,\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \|\vec{z}\| = \|\vec{x}\|\cos\theta = \|\vec{x}\|\cos\theta\cdot 1 = \|\vec{x}\|\cos\theta\cdot\frac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|} = \frac{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta}{\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

Vi vet nå lengden til $\vec{z}$. Hvis vi ganger denne lengden med en vektor som peker i samme retning som $\vec{y}$ og som har lengde 1, så vil jo resultatet bli $\vec{z}$.

Og vektoren som peker i samme retning som $\vec{y}$ og har lengde 1 er $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

$$\Rightarrow \vec{z} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\,\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2}\,\vec{y} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\vec{y}\cdot\vec{y}}\,\vec{y}$$

Altså $P = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\vec{y}\cdot\vec{y}}$.

$\boxed{2}$ Skriv opp definisjonen på skalarproduktet mellom to komplekse vektorer, forklar hvorfor $A^* = A^{-1}$ dersom kolonnene i A er ortonormale, og finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Komplekst skalarprodukt: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \dots & \overline{x}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{x}^*\vec{y}$$

hvor $(-)^*$ er adjungering (transponering + kompl. konjugert): $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^* = (\overline{a_{ji}})$.

La A være en kvadratisk kompleks $n\times n$-matrise med ortonormale kolonner.

Altså hvis v_i og v_j er kolonner i A har vi $v_i\cdot v_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ hvor skalarproduktet er det komplekse.

Hvis vi skriver $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, så gir adjungering $A^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix}$

Da gir multiplikasjon: $A^*A = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^* v_1 & v_1^* v_2 & \cdots & v_1^* v_n \\ v_2^* v_1 & v_2 v_2 & \cdots & v_2^* v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^* v_1 & v_n^* v_2 & \cdots & v_n^* v_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \cdots & v_n \cdot v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

Og matrisen som kan ganges med A for å gi I_n er jo A^{-1}, så vi har $A^* = A^{-1}$.

Hvis $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ hvor $v_1, \ldots, v_4$ er kolonnevektorene, så består kolonnerommet til A av alle vektorer som kan skrives som en lineærkombinasjon av disse kolonnevektorene:

$$Col(A) = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ sånn at } av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = v \}$$

Vi vil bruke Gram-Schmidt prosessen på en basis av dette kolonnerommet for å finne en ortogonal basis. Ved første øyekast kan man tro at $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ er en basis for $Col(A)$.

Husk at en basis for et vektorrom består av en mengde vektorer slik at:

- de er lineært uavhengige
- alle vektorer i vektorrommet kan skrives som en lineærkombinasjon av vektorene i basisen

Det siste kriteriet holder for $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i $Col(A)$ per definisjon av $Col(A)$.

MEN, merk at $\det(A) = 0 \Rightarrow$ kolonnene er lineært avhengige

Det vil si at minst én av kolonnene kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre, de(n) kolonnen(e) kan dermed fjernes fra $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ slik at mengden vi sitter igjen med er lineært uavhengig og dermed en basis for $Col(A)$.

For å finne ut hva som er overflødig løser vi følgende:

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_2 - 1 \cdot v_4 = 0$, eller $v_4 = v_2 + v_3$. Altså v_4 er overflødig.

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2, v_3\}$ er lineært uavhengige og dermed en basis for $Col(A)$.

[Alternativt: man kan lett se på kolonnene i A at $v_4 = v_2 + v_3$ og dermed kan i hvertfall v_4 elimineres.
Hvis du da kan argumentere for at v_1, v_2, v_3 er lineært uavhengige og dermed en basis for $Col(A)$,
da kan man slippe unna å måtte gjøre gausseliminasjonen.

Vi har nå at $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en basis for $Col(A)$. For å finne en ortogonal basis for $Col(A)$

gjører vi Gram-Schmidt algoritmen på v_1, v_2, v_3:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad u_1 \cdot u_1 = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = 6$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \cancel{\frac{2+0-2+0}{6}}^{\,0} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad u_2 \cdot u_2 = 1+0+4+1 = 6$$

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2+1+1+0}{6} u_1 - \frac{1+0-2+0}{6} u_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Hvis vi ble bedt om å finne en ortonormal basis, måtte vi også dele hver av vektorene på sin egen norm.

Men siden vi bare har blitt bedt om en ortogonal basis, spiller ikke lengden på vektorene noen rolle.

Valgfritt: vi kan dermed gange u_3 med 6 for å bli kvitt brøkene $\Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ en ortogonal basis for $Col(A)$ er gitt av $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bonus: dobbelsjekk at basisen faktisk er ortogonal

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2+0-2+0 = 0 \quad \checkmark$$

$$u_1 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2+2+0+0 = 0 \quad \checkmark$$

$$u_2 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+0+0+1 = 0 \quad \checkmark$$