Interpolasjon og regresjon

Eksamen:

1 Forklar hva normallikningene er og finn regresjonslinjen til punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Hvis man har m+1 punkter $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, m+1$, hvor $x_i \neq x_j$ når $i \neq j$, så kan man alltid finne et reelt polynom $p(x)$ av grad m slik at $p(x_i) = y_i \ \forall i$. Dette er interpolasjon.

Hvis man i stedet prøver å finne et slikt polynom, men hvor p har grad $n < m$ er det ikke sikkert vi kan finne et polynom hvis graf treffer alle punktene. I stedet leter vi etter en $p(x)$ som er en så god tilnærming til løsningen på dette problemet som mulig. Dette er regresjon.

For å finne $p(x)$ bruker vi minste kvadraters metode. Gitt punktene (x_i, y_i) setter vi opp det lineære ligningsystemet

$$\begin{cases} a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ \vdots \\ a_n x_{m+1}^n + a_{n-1} x_{m+1}^{n-1} + \dots + a_1 x_{m+1} + a_0 = y_{m+1} \end{cases}$$

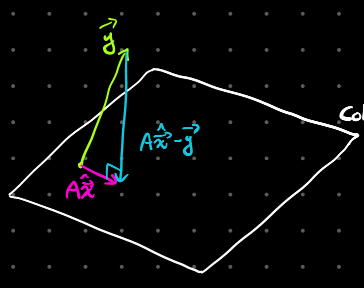
Dette kan vi skrive om til matriseligningen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m+1}^n & x_{m+1}^{n-1} & \cdots & x_{m+1} & 1 \end{bmatrix}}_{(m+1)\times(n+1)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}}_{(n+1)\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+1} \end{bmatrix}}_{(m+1)\times 1}$$

$$\Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{y}$$

Denne ligningen har ikke nødvendigvis en løsning, så vi leter heller etter den $\hat{\vec{x}} \in \mathrm{Col}(A)$ som minimerer avstanden mellom vektorene $A\hat{\vec{x}}$ og $\vec{y}$.

Tegning:



Col(A) = vektorrommet av alle vektorer som er lineærkombinasjoner av kolonnene til A

For en vektor $\vec{x}$, så er $A\vec{x}$ en vektor i $\mathrm{Col}(A)$. Det at $A\vec{x} = \vec{y}$ ikke har en løsning betyr at $\vec{y} \notin \mathrm{Col}(A)$. Så vi leter i stedet etter en $\hat{\vec{x}}$ sånn at $A\hat{\vec{x}}$ er den vektoren i $\mathrm{Col}(A)$ som er den beste mulige tilnærmingen til $\vec{y}$. Det vil si, avstanden fra $\vec{y}$ til $A\hat{\vec{x}}$ skal være så liten som mulig.

Vektoren $A\hat{x}$ vi er ute etter er dermed projeksjonen av $\vec{y}$ ned i $\mathrm{Col}(A)$, så vi må kreve at vektoren $A\hat{x}-\vec{y}$ står ortogonalt på $\mathrm{Col}(A)$.

Og vektorer som står ortogonalt på $\mathrm{Col}(A)$ er vektorer i nullrommet til A^*, $(\mathrm{Col}\,A)^{\perp} = \mathrm{Null}\,A^*$.

Dermed har vi $A^*(A\hat{x}-\vec{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^*A\hat{x} = A^*\vec{y}$

Dette er et $(n+1)\times(n+1)$-system, og radene her utgjør normalligningene.

Siden vi vet $\vec{y}$ og vi kan regne ut A og A^*, er dette et system vi kan løse direkte.
Alle løsninger $\hat{x}$ vil være gyldige løsninger på oppgaven.

Men hvis kolonnene i A er lineært uavhengige vil A^*A være inverterbar og da vil det være en entydig løsning $\hat{x}$ på oppgaven.

Vi vil finne en regresjonslinje, altså et førstegradspolynom $p(x) = ax+b$.

Punktene er $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$, og $(3,2)$.

Vi skriver opp ligningene $p(x_i) = y_i$:

$$\begin{aligned} p(0) &= a\cdot 0 + b = 1 \\ p(1) &= a\cdot 1 + b = 0 \\ p(2) &= a\cdot 2 + b = 1 \\ p(3) &= a\cdot 3 + b = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi regner ut:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A^*A) = 14\cdot 4 - 6\cdot 6 = 20 \neq 0$
$\Rightarrow$ A^*A inverterbar
$\Rightarrow$ forventer entydig løsning

$$A^*\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Så vi må løse $A^*A\hat{x} = A^*\vec{y}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{p(x) = \frac{2}{5}(x+1)}}$$