Tidligere:

- Fourierrekker: Vi har en T-periodisk funksjon $f(t)$ som vi vil beskrive som en rekke

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t} \quad \text{med fourierkoeffisienter} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-\frac{2\pi i n}{T}t}$$

- Fouriertransformasjon: Vi beskriver en integrerbar funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som et integral

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\omega t}\, dt \quad \text{hvor} \quad \hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{er fouriertransformasjonen til } f.$$

Denne uken: Vi har en 2π-periodisk funksjon $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ (periode 2π for å holde det enkelt). Vi har også et ekvidistant gitter på $[0, 2\pi]$, altså

$$t_k = \frac{\pi k}{N}, \quad 0 \le k \le N.$$

Vi vet hva verdiene $f(t_k)$ er $\forall k$.

Målet vårt nå er å finne et komplekst trigonometrisk polynom

$$p(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{int}$$

(altså en lineærkombinasjon av e^{int} for $n = 0, 1, \dots, N-1$) som interpolerer f i gitterpunktene, altså

$$f(t_k) = p(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{int_k}.$$

Så vi trenger å finne koeffisientene c_n, $n = 0, 1, \dots, N-1$, og det er alle disse verdiene c_n som vil være den diskrete fouriertransformasjonen (DFT).

Først litt forarbeid:

1 Vis at

$$(x, y) = \sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\frac{\pi k}{N}\right)\overline{y\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

er et komplekst indreprodukt, og at funksjonene

$$e^{int} \qquad \text{der} \qquad -N \le n \le N-1$$

er ortogonale med hensyn på dette indreproduktet, og bruk det du lærte om ortogonale vektorer i TMA4106 til å utlede at

$$c_n = \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\frac{\pi k}{N}\right) e^{-in\frac{\pi k}{N}}$$

og gå tilbake til formelen for fourierrekker på $[-\pi, \pi]$ og sjekk at du ser analogien.

Vi bruker $-N \le n \le N-1$ i stedet for $0 \le n \le N-1$ her for tydeligere å se likheten med fourierrekker og -transformasjoner.

- Konjugert symmetri:

$$\overline{(y, x)} = \overline{\sum_{k=-N}^{N-1} y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}} = \sum_{k=-N}^{N-1} \overline{y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}} = \sum_{k=-N}^{N-1} \overline{y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}\,\overline{\overline{x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N-1} \overline{y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}\, x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right) = \sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)} = (x, y)$$

- Lineært i 1. argument: $a, b \in \mathbb{C}$,

$$(ax + by, z) = \sum_{k=-N}^{N-1} (ax+by)\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)} = \sum_{k=-N}^{N-1}\left(ax\left(\tfrac{\pi k}{N}\right) + by\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N-1} ax\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)} + by\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)} = a\sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)} + b\sum_{k=-N}^{N-1} y\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)\overline{z\left(\tfrac{\pi k}{N}\right)}$$

$$= a(x, z) + b(y, z)$$

- Positivt definitt: $x \neq 0 \Rightarrow$ det er minst én $k \in [-N, N-1]$ sånn at $x\left(\frac{\pi k}{N}\right) \neq 0$.

$$(x,x) = \sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\frac{\pi k}{N}\right)\overline{x\left(\frac{\pi k}{N}\right)} = \sum_{k=-N}^{N-1} \left|x\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right|^2 > 0$$ siden det er minst ett ledd som ikke er null og $|z| > 0 \quad \forall z \neq 0$. (husk også at $|z| \in \mathbb{R}$, selv om $z \in \mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ $(-,-)$ er et komplekst indreprodukt.

La $m, n \in [-N, N-1]$ og $m \neq n$. Da har vi

$$(e^{imt}, e^{int}) = \sum_{k=-N}^{N-1} e^{im\cdot\frac{\pi k}{N}}\overline{e^{in\cdot\frac{\pi k}{N}}} = \sum_{k=-N}^{N-1} e^{im\cdot\frac{\pi k}{N}} e^{-in\cdot\frac{\pi k}{N}} = \sum_{k=-N}^{N-1} e^{\frac{i\pi k}{N}(m-n)}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N-1}\left(e^{\frac{i\pi}{N}(m-n)}\right)^k = \sum_{k=-N}^{N-1}(e^{\alpha})^k$$

La $\alpha = \frac{i\pi}{N}(m-n)$ for å holde notasjon litt enklere

$$= \sum_{k=0}^{2N-1}(e^{\alpha})^{k-N}$$

$$= e^{-N\alpha}\sum_{k=0}^{2N-1}(e^{\alpha})^k$$

geometrisk sum!

$$= e^{-N\alpha}\cdot\frac{1-(e^{\alpha})^{2N}}{1-e^{\alpha}}$$

$$= \frac{e^{-N\alpha}-e^{N\alpha}}{1-e^{\alpha}}$$

$$= \frac{e^{N\alpha}-e^{-N\alpha}}{e^{\alpha}-1}$$

$$= \frac{e^{i\cdot\pi(m-n)}-e^{-i\cdot\pi(m-n)}}{e^{\alpha}-1}$$

$$= \frac{2i\sin(\pi\cdot(m-n))}{e^{\alpha}-1}$$

siden $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$= 0$$

siden $m-n \in \mathbb{Z}$ og $\sin(\pi k) = 0$ når $k \in \mathbb{Z}$

Hvis $m=n$ har vi: $(e^{int}, e^{int}) = \sum_{k=-N}^{N-1} e^{in\frac{\pi k}{N}}\cdot e^{-in\frac{\pi k}{N}} = \sum_{k=-N}^{N-1} 1 = 2N \neq 0$.

$\Rightarrow$ $\{e^{int} \mid -N \leq n \leq N-1\}$ er innbyrdes ortogonale mhp $(-,-)$.

Fra TMA4106 vet vi at hvis vi har en ortogonal basis $u_1, \dots, u_n$ for et indreproduktrom V, og hvis $v \in V$ som vi kan skrive som $v = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ for noen skalarer c_k, da kan vi regne ut c_k ved å bruke formelen

$$c_k = \frac{(v, u_k)}{(u_k, u_k)}.$$

$\{e^{int}\}$ er ortogonale og de er en basis for vektorrommet vi jobber i (gidder ikke vise det :P).

Hvis $x(t)$ da er en funksjon (vektor) i dette rommet kan vi skrive

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{N-1} c_n e^{int}$$

for noen $c_n \in \mathbb{C}$.

For $n \in [-N, N-1]$ har vi da:

$$(x, e^{int}) = \sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\frac{\pi k}{N}\right) e^{-int} \qquad \text{og} \qquad (e^{int}, e^{int}) = 2N$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{(x, e^{int})}{(e^{int}, e^{int})} = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x\left(\frac{\pi k}{N}\right) e^{-int}$$

Notasjonen brukt her ligner jo på det vi har brukt tidligere, med rekker $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdots$ og integraler $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots$.

Men med DFT så er det vanlig å la summen starte på 0, $\sum_{n=0}^{N-1} \cdots$, i stedet.

Så la x være et diskret signal med N verdier, altså vi har verdier $x(k) = x_k$ for $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Vi lar $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n}{N} k}$ for $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Da er det $X = \{X_n \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}$ som er den diskrete fouriertransformasjonen til x.

Inverstransformasjonene er gitt av $x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}}$

Vi utleder disse formlene som følger:

2 Vis at

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} x(k)\overline{y(k)}$$

er et komplekst indreprodukt, og at funksjonene

$$e^{2\pi i n k/N} \qquad \text{der} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

er ortogonale med hensyn på dette indreproduktet, og bruk det du lærte om ortogonale vektorer i TMA4106 til å utlede at dersom

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i n k/N} \qquad \text{er} \qquad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi i n k/N}.$$

Lykke til med å gå tilbake til formelen for fourierrekker på $[-\pi, \pi]$ og sjekke at du ser analogien.

Dette er veldig likt forrige oppg. så skriver ikke like detaljert.

- $\overline{(y, x)} = \overline{\sum_{k=0}^{N-1} y_k \overline{x_k}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k} = (x, y)$
- $(ax + by, z) = \sum_{k=0}^{N-1} (ax+by)_k \overline{z_k} = a \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{z_k} + b \sum_{k=0}^{N-1} y_k \overline{z_k} = a(x,z) + b(y,z)$.
- $x \neq 0 \Rightarrow \exists m$ sånn at $x_m \neq 0$

$$\Rightarrow (x, x) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \geq |x_m|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ indreprodukt ✓

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{N}nk}, e^{\frac{2\pi i}{N}nk}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}nk} e^{-\frac{2\pi i}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

For $m \neq n$, $\left(e^{\frac{2\pi i}{N}mk}, e^{\frac{2\pi i}{N}nk}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}(m-n)}\right)^k$

$$= \frac{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(m-n)\cdot N}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(m-n)}} \quad \text{[geometrisk sum]}$$

$$= \frac{1 - \left(e^{2\pi i}\right)^{m-n}}{1 - e^{2\pi i(m-n)/N}}$$

$$= \frac{1 - 1^{m-n}}{1 - e^{2\pi i(m-n)/N}} = 0$$

$\Rightarrow \left\{ e^{\frac{2\pi i}{N}nk} \mid n = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$ er innbyrdes ortogonale. ✓

De er og en basis for rommet. Så hvis x er i vektorrommet kan vi skrive

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{\frac{2\pi i}{N}nk}$$

for noen $c_n \in \mathbb{C}$.

Vi har $\left(x, e^{\frac{2\pi i}{N}nk}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$ og $\left(e^{\frac{2\pi i}{N}nk}, e^{\frac{2\pi i}{N}nk}\right) = N$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$$

Altså vi har $x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N}nk}$ hvor $X_n := \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$. ✓

Vi starter altså med $x = [x_0 \; x_1 \; \cdots \; x_{N-1}]^T$ og vi finner $X = [X_0 \; X_1 \; \cdots \; X_{N-1}]^T$ med formelen $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}nk}$.

Stirrer du på dette en stund så kan du kanskje skjønne at vi egentlig regner ut produktet

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\omega\cdot 0\cdot 0} & e^{\omega\cdot 0\cdot 1} & \cdots & e^{\omega\cdot 0\cdot(N-1)} \\ e^{\omega\cdot 1\cdot 0} & e^{\omega\cdot 1\cdot 1} & \cdots & e^{\omega\cdot 1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\omega\cdot(N-1)\cdot 0} & e^{\omega\cdot(N-1)\cdot 1} & \cdots & e^{\omega\cdot(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \omega = -\frac{2\pi i}{N}$$

Siden DFT per definisjon består av endelig mange utregninger, så kan vi bruke algoritmer og datamaskiner til å regne ut DFT'er fullstendig, og ikke bare tilnærminger som vi måtte nøye oss med når vi så på fourierrekker.

3 Skriv opp dette matrise-vektorproduktet for $N = 7$ og $N = 8$. Se nøye på vandermondematrisene, og se om du ser noen forskjell. Hvis du ser veldig nøye etter, vil du kanskje skjønne hvordan Cooley og Tukey klarte å redusere antall beregninger fra størrelsesorden N^2 til $N \log N$.

Siden jeg alt har skrevet det generelle produktet er jo dette nå trivielt, men:

$\underline{N=7}$:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\omega} & e^{\omega\cdot 2} & e^{\omega\cdot 3} & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 5} & e^{\omega\cdot 6} \\ 1 & e^{\omega\cdot 2} & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 8} & e^{\omega\cdot 10} & e^{\omega\cdot 12} \\ 1 & e^{\omega\cdot 3} & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 9} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 15} & e^{\omega\cdot 18} \\ 1 & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 8} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 16} & e^{\omega\cdot 20} & e^{\omega\cdot 24} \\ 1 & e^{\omega\cdot 5} & e^{\omega\cdot 10} & e^{\omega\cdot 15} & e^{\omega\cdot 20} & e^{\omega\cdot 25} & e^{\omega\cdot 30} \\ 1 & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 18} & e^{\omega\cdot 24} & e^{\omega\cdot 30} & e^{\omega\cdot 36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$\underline{N=8}$:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\omega} & e^{\omega\cdot 2} & e^{\omega\cdot 3} & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 5} & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 7} \\ 1 & e^{\omega\cdot 2} & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 8} & e^{\omega\cdot 10} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 14} \\ 1 & e^{\omega\cdot 3} & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 9} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 15} & e^{\omega\cdot 18} & e^{\omega\cdot 21} \\ 1 & e^{\omega\cdot 4} & e^{\omega\cdot 8} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 16} & e^{\omega\cdot 20} & e^{\omega\cdot 24} & e^{\omega\cdot 28} \\ 1 & e^{\omega\cdot 5} & e^{\omega\cdot 10} & e^{\omega\cdot 15} & e^{\omega\cdot 20} & e^{\omega\cdot 25} & e^{\omega\cdot 30} & e^{\omega\cdot 35} \\ 1 & e^{\omega\cdot 6} & e^{\omega\cdot 12} & e^{\omega\cdot 18} & e^{\omega\cdot 24} & e^{\omega\cdot 30} & e^{\omega\cdot 36} & e^{\omega\cdot 42} \\ 1 & e^{\omega\cdot 7} & e^{\omega\cdot 14} & e^{\omega\cdot 21} & e^{\omega\cdot 28} & e^{\omega\cdot 35} & e^{\omega\cdot 42} & e^{\omega\cdot 49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Som du sikkert har følt på kroppen, så kan matrisemultiplikasjon ta ganske lang tid, særlig når matrisene blir store. Det gjelder fortsatt selv om vi får datamaskinene til å gjøre det for oss, så vi vil ha en mer effektiv måte å gjøre dette på.

Observasjonen vi kan gjøre med DFT er at alle komponentene i en DFT-matrise for en N_0 er også inneholdt i alle DFT-matriser for alle $N > N_0$.

Idéen er da: Gitt $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ for en eller annen N, vi vil bryte DFT-problemet opp i to mindre DFT-problemer, løse hver av de, og bruke resultatene til å regne ut $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ mye mer effektivt enn å gjøre matrisemultiplikasjonen direkte.

Hvert underproblem kan jo også brytes opp i mindre og enklere problemer, så vi kan fortsette denne oppbrytningen til vi har to underproblemer det er trivielt å løse.

Cooley-Tukey algoritmen gjør det som følgende:

Given $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$:
  if $N = 1$:
    $X_0 \leftarrow x_0$ — trivielt tilfelle
  else :
    $E_0, E_1, \dots, E_{\frac{N}{2}-1} \leftarrow$ Cooley-Tukey$(x_0, x_2, \dots, x_{N-2})$ — finn DFT for partallsindeksene x_{2k}
    $O_0, O_1, \dots, O_{\frac{N}{2}-1} \leftarrow$ Cooley-Tukey$(x_1, x_3, \dots, x_{N-1})$ — finn DFT for oddetallsindeksene x_{2k-1}
    for $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ do :
      $p \leftarrow E_k$
      $q \leftarrow \exp(-\frac{2\pi i}{N} \cdot k) \cdot O_k$
      $X_k \leftarrow p + q$
      $X_{k+\frac{N}{2}} \leftarrow p - q$

kombiner DFT'ene vi har funnet for å finne DFT'en for hele $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$

Denne varianten funker bare hvis $N = 2^m$, men det er måter å omgå det hvis N ikke er på den formen.

Wikipedia-artikkelen for Cooley-Tukey forklarer egentlig ting greit, så sjekk den ut hvis du vil ha flere detaljer.

Vi må selvfølgelig ha pytagoras, som sier at

$$\text{Plancherel:} \quad N \cdot \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2$$

$\boxed{4}$ Jeg kunne bedt deg utlede dette, men du har allerede gjort det på eksamen i TMA4106. Derfor slipper du det nå. Dette er fordelen med abstrakt matematikk.

Vi har $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n}{N} k}$

$$\Rightarrow |X_n|^2 = X_n \cdot \overline{X_n} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n}{N} k} \cdot \overline{\sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i n}{N} j}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_j} e^{\frac{2\pi i n}{N}(j-k)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_j} e^{\frac{2\pi i n}{N}(j-k)} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x_j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i n}{N}(j-k)}$$

Fra tidligere oppgaver vet vi at den innerste summen (over n) blir

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i n}{N}(j-k)} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \overline{x_k} \cdot N = N \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$$

Dette kalles ikke egentlig pytagoras, men derimot Plancherels teorem, jeg har bare kalt det pytagoras til nå siden det er det det er en generalisering av. En generalisering av Plancherel er Parsevals teorem, som sier at

$$\text{Parseval:} \quad N \cdot (x, y) = (X, Y)$$

$\boxed{5}$ Klarer du denne?

Dette er veldig likt den forrige:

$$(X, Y) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \overline{Y_n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n}{N} k} \overline{\sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi i n}{N} j}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y_j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i n}{N}(j-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k} \cdot N$$

$$= N(x, y)$$

DFT brukes selvfølgelig til filtrering av digitale signal, og alle signaler er digitale nå til dags. Derfor må vi også ha konvolusjonsteoremet. Diskret konvolusjon er

$$x * y = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y(k-m)$$

$\boxed{6}$ Vis at den diskrete fouriertransformen x til $x * y$ er $X \cdot Y$

$$\cancel{(X, Y) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \overline{Y_n}}$$

$$\mathrm{DFT}(x * y)_n = \sum_{k=0}^{N-1} (x*y)_k\, e^{-\frac{2\pi i n}{N} k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{k-m} \right) e^{-\frac{2\pi i n}{N} k}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{k=0}^{N-1} y_{k-m}\, e^{-\frac{2\pi i n}{N} k}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-\frac{2\pi i n}{N} m} \underline{\sum_{k=0}^{N-1} y_{k-m}\, e^{-\frac{2\pi i n}{N}(k-m)}}$$

Vi jobber med periodiske funksjoner, så du kan prøve å overbevise deg selv om at summen over k egentlig går over alle leddene som inngår i definisjonen til Y_n. Altså den er lik Y_n

$$= X_n \cdot Y_n$$