Optimering

Optimering har jeg ikke gjort kjempemye av selv, men fra det jeg har gjort så er nok hovedtrikset mitt denne uken å holde tunga rett i munnen. Hvis du greier å få oversikt over informasjonen oppgavene gir deg, så er ofte resten ganske greit.

1 Det er desember, og jeg leser febrilsk til mine to siste eksamener; TMA4111 og TDT4160. Det tar meg 4 timer å løse et eksamensett i TMA4111 og 2 timer å løse et eksamensett i TDT4160. Det vil si at dersom jeg leser 1 time på TMA4111 har jeg løst $\frac{1}{4}$ eksamensett og hvis jeg leser 1 time på TDT4160 har jeg løst $\frac{1}{2}$ eksamensett. Vi antar for enkelthets skyld at jeg ikke blir noe raskere på å løse eksamensettene innen eksamensperioden er over.

Definér funksjonen $f(x, y)$ som gir hvor mange eksamensett du har løst totalt dersom du leser i x timer på TMA4111 og y timer på TDT4160.

x = # timer brukt på TMA4111
y = # timer brukt på TDT4160

4 timer per TMA4111 eksamen, eller $x = 1 \longleftrightarrow \frac{1}{4}$ TMA4111 eksamen
$\Rightarrow$ x timer brukt på TMA4111 tilsvarer $\frac{x}{4}$ eksamensett

2 timer per TDT4160 eksamen, eller $y = 1 \longleftrightarrow \frac{1}{2}$ TDT4160 eksamen
$\Rightarrow$ y timer brukt på TDT4160 tilsvarer $\frac{y}{2}$ eksamensett.

Både $\frac{x}{4}$ og $\frac{y}{2}$ beskriver lineære funksjoner (de er av formen $ax+b$) og passer dermed med antakelsen at Daniel ikke blir noe raskere.

Vi vil nå bruke $\frac{x}{4}$ og $\frac{y}{2}$ for å definere $f(x,y)$.

Det gir ikke mening å gange dem sammen, for hvis vi bruker 0 timer i ett av fagene blir da hele funksjonen 0, selv om det fortsatt er mulig å gjøre eksamensett ved å jobbe i det andre faget. Divisjon er like problematisk (i tillegg til "dele på 0"-problemet).

Det er ingen informasjon som tilsier at å bruke timer i noen av fagene trekker NED antall eksamensett gjort, så jeg forventer ingen minus i funksjonen.

Jeg sitter igjen med addisjon, altså $\frac{x}{4} + \frac{y}{2}$.

Hvis jeg bruker 0 timer i begge fagene forventer jeg å ha gjort 0 eksamensett, så det burde ikke være noe konstantledd i funksjonen.

Vi definerer dermed $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som $f(x,y) = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$.

Vi kan sjekke om dette gir mening ved å bruke f på informasjonen oppgitt i oppgaven
4 timer i TMA4111 (og 0 i TDT4160) $= f(4,0) = 1+0 = 1$ eksamensett gjort ✓
2 timer i TDT4160 (og 0 i TMA4111) $= f(0,2) = 0+1 = 1$ eksamensett gjort ✓

Idéelt sett vil du nok gjøre så mange eksamenssett som mulig før eksamen, altså du vil **maksimere** $f(x,y)$. Men i det virkelige liv er ting mer komplisert enn forrige oppgave kan få det til å se ut som. Og skal optimeringsproblemer være nyttige så må de nesten ta hensyn til noen av begrensningene vi jobber med realistisk sett.

Vi kan ha begrensninger i form av f.eks. ressurser tilgjengelig, for det er jo ikke uendelig mange timer til eksamen, så det gir mening å begrense hvor store x og y kan være.
Andre begrensninger kan komme av krav som sikrer at ting gir mening, f.eks. ikke-negativitet for variablene.

$\boxed{2}$ Du har regnet ut at du kun har 100 timer igjen å lese før begge eksamenene dine (her antar vi ganske brutalt at eksamen i TMA4111 og TDT4160 lander på samme dag, men dette er kun en forenkling).

Du synes også at TMA4111 er enklere enn TDT4160, så du bestemmer deg for å lese minst 20 timer mer på TMA4111 enn du gjør på TDT4160.

Samtidig er det naturligvis ikke mulig å lese i et negativt antall timer.

Lag ulikheter som beskriver begrensningene nevnt over, dersom x representerer antall timer du leser på TMA4111 og y er antall timer du leser på TDT4160.

x er timer brukt i TMA4111 og y er timer i TDT4160, så $x+y$ beskriver jo da timer brukt totalt. Hvis vi har 100 igjen, så er begrensningen $x+y \leq 100$.

Du bruker y timer i TDT4160. 20 timer mer enn dette er $y+20$. Hvis vi vil bruke minst så mye i TMA4111 er begrensningen $x \geq y+20$.

Negative timer gir ikke mening $\Rightarrow$ $x \geq 0$, $y \geq 0$.

til et LP er som følger:

$$\max_{x,y} f(x,y), \text{ slik at } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ c_1(x,y) \geq 0 \\ c_2(x,y) \geq 0 \\ \vdots \\ c_i(x,y) \geq 0 \end{cases}$$

Her beskriver funksjonene c_i begrensningene.

$\boxed{3}$ Sett optimeringsproblemet vårt om eksamenslesing på standardform. (Hint: i vårt tilfelle har vi to c-funksjoner).

Vi har:

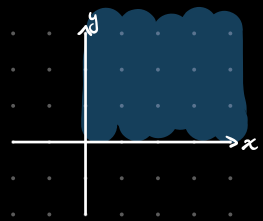
- $x+y \leq 100 \Rightarrow -x-y+100 \geq 0$, så $c_1(x,y) = -x-y+100$
- $x \geq y+20 \Rightarrow x-y-20 \geq 0$, så $c_2(x,y) = x-y-20$
- ikke-negativitet, $x \geq 0, y \geq 0$.

Så optimeringsproblemet vårt er

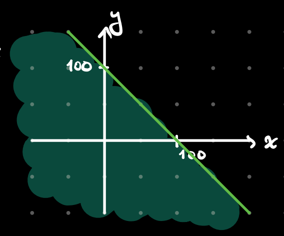
$$\max_{x,y} \frac{x}{4} + \frac{y}{2}, \text{ slik at } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -x-y+100 \geq 0 \\ x-y-20 \geq 0 \end{cases}$$

4 Bruk ulikhetsbegrensningene vi definerte tidligere for å skissere det området i (x, y)-planet som definerer gyldige kombinasjoner av antall timer lest på TMA4111 og TDT4160. Det er lurt å tegne én og én ulikhet om gangen. Det kan også være lurt å skissere på papir.

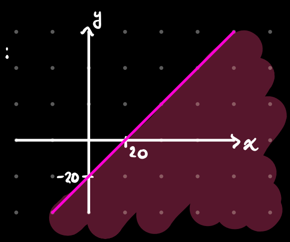
$x \geq 0$ og $y \geq 0$:



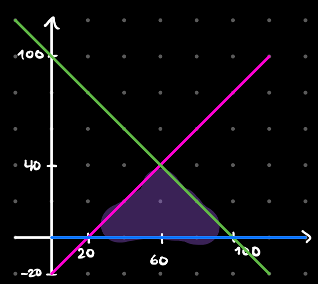
$x + y \leq 100$:



$x \geq y + 20$:



Setter vi alle disse sammen, så får vi:

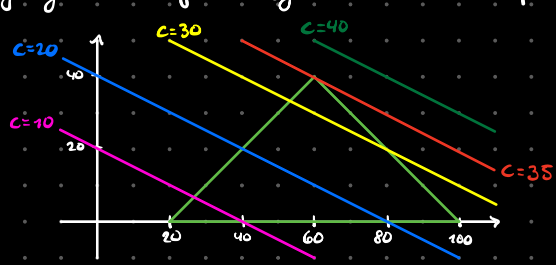


5 Finn det optimale punktet.

OBS: Ser ut som Daniel har brukt $x + 20 \geq y$ istedet for $x \geq y + 20$ i notatet hans. Jeg mener fortsatt min tolkning er riktig. Fight me!

Vi vil maksimere $f(x,y)$. Vi skriver $f(x,y) = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = C \implies y = 2C - \frac{x}{2}$.

Vi tester forskjellige verdier for C og ser hvordan konturplottet til f da passer inn i plottet vårt:



Vi vil at C skal være så stor som mulig. Det skjer jo lengre opp og til høyre vi er i plottet, altså for større verdier av x og y. Og den største verdien av C hvor konturplottet fortsatt overlapper med definisjonsområdet vårt er for $C = 35$. Dette skjer på randen til begge kravene $x \geq y + 20$ og $x + y \leq 100$, altså vi har faktisk likhet her, $x = y + 20$ og $x + y = 100$. Vi kan dermed bruke disse eller én av dem og funksjonen i seg selv for å bestemme hva x^* og y^* må være.

F.eks. $y = 2 \cdot 35 - \frac{x}{2} = 70 - \frac{x}{2}$ og vi har $x = y + 20$

$\Rightarrow y = 70 - \frac{y+20}{2} = 70 - \frac{y}{2} - 10 = 60 - \frac{y}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} y = 60$

$\Rightarrow y = 60 \cdot \frac{2}{3} = \frac{120}{3} = 40$

og $x = y + 20 = 40 + 20 = 60$

$\Rightarrow (x^*, y^*) = (60, 40)$, $f(60, 40) = 35.$

Jeg går nå på en veldig rar butikk som kun selger tre varer: Te, kaffepulver og kaffefilter. Butikken selger disse varene for følgende priser:

Vare	Pris [kr/kg]
Te	4
Kaffepulver	5
Kaffefilter	2

(se bort ifra det at man aldri ville kjøpt kilogramvis med kaffefilter).

$\boxed{6}$ Definér funksjonen $f(x, y, z)$ som beskriver hvor mye penger jeg bruker på butikken dersom jeg kjøper x kg te, y kg kaffepulver og z kg kaffefilter.

På lignende vis som i oppg. $\boxed{1}$ så er det ikke veldig vanskelig å se at vi er ute etter funksjonen

$$f(x, y, z) = 4x + 5y + 2z$$

Det gir ikke mening å kjøpe bare kaffefilter uten å kjøpe kaffepulver, og motsatt. Derfor har vi en restriksjon ("constraint"), om at for hvert kilogram med kaffefilter så må vi også kjøpe 4 kilogram med kaffepulver. Samtidig gir det ikke mening å kjøpe negative mengder av hverken te, kaffepulver eller kaffefilter.

$\boxed{7}$ Definér restriksjonene som er nevnt over.

1 kg filter krever 4kg kaffepulver $\Rightarrow z = 4y$

Ikke-negativitet $\Rightarrow x, y, z \geq 0$

$$\Rightarrow \max_{x,y,z} \; 4x + 5y + 2z, \quad \text{slik at} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{8}$ Finn den kombinasjonen av varer som maksimerer antall kilo jeg må bære hjem fra butikken, dersom jeg kun har 20 kr å handle for.

Vi har 20 kr $\Rightarrow$ vi har i tillegg kravet $x + y + z \leq 20$

Ved å bruke $z = 4y$ kan vi forenkle funksjonsuttrykket og uttrykket for det siste kravet:

$4x + 5y + 2z = 4x + 5y + 2 \cdot 4y = 4x + 13y$

$x + y + z = x + y + 4y = x + 5y \leq 20$

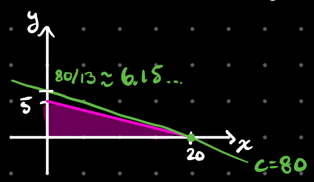
Siden funksjonsuttrykket er en sum og vi vil at denne summen skal være så stor som mulig, så er det ønskelig at leddene blir så store som mulig. Hvis vi tenker at vi har brukt så store verdier som mulig for x og y (og z, men den blir jo bestemt av y og $z=4y$), da vil vi være på en x- og y-verdi slik at $x+5y=20$. Hvis ikke så ville det jo vært mulig å øke x eller y mer.

Vi sitter da igjen med: $\quad x+5y=20 \Rightarrow x = 20-5y$

$$\Rightarrow 4x + 13y = 4(20-5y)+13y = 80-20y+13y = 80-7y = C$$

$$\Rightarrow 7y = C-80$$

Siden $y \geq 0$ må vi ha $C \geq 80$. Prøver vi å tegne et konturplott nå får vi :



= definisjonsområdet, altså lovlige x- og y-verdier.

Som i det forrige problemet så er f en sum av ikke-negative tall, så større verdier for $f(x,y,z)=C$ krever større x- og y-verdier. Men vi fant også at $C \geq 80$. I tegningen ser vi da lett at større verdier for C vil kreve x- og y-verdier utenfor definisjons området. Så maksimalt mulig verdi for C er 80.

Da får vi: $\quad 7y = C-80 = 80-80 = 0 \Rightarrow y=0$

$$x = 20-5y = 20-5\cdot 0 = 20$$

$$z = 4\cdot y = 4\cdot 0 = 0$$

Altså $(x^*, y^*, z^*) = (20, 0, 0)$. Med andre ord, bare kjøp te.