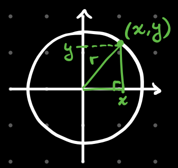
Flate integraler

1 Finn likningen for en kule med radius R og sentrum i (x_0, y_0, z_0).

I 2 dimensjoner og med senter i origo er dette lett:

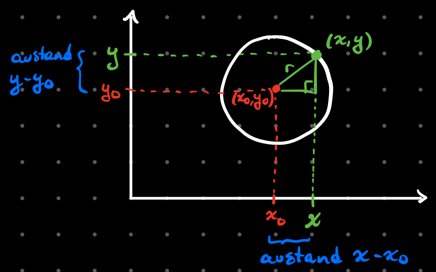


For et vilkårig punkt (x,y) på sirkelen, lag en rettvinklet trekant som på bildet.

Katetene har lengde x og y, og hypotenusen har lengde r som er radiusen til sirkelen. Da gir Pytagoras

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Hvis senteret til sirkelen er i punktet (x_0, y_0) blir tegningen:

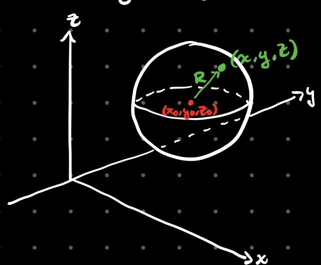


Og da gir Pytagoras

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Skriver vi dette om til $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ (dropp negativ rot siden bare $r \geq 0$ gir geometrisk mening) så er dette formelen for lengden/normen til vektoren $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$.

I 3 dimensjoner får vi da:



I vektornotasjon kan vi si at kulen med senter (x_0, y_0, z_0) og med radius R beskrives av alle vektorer som starter i senteret og har lengde R.
For et vilkårig punkt (x,y,z) på sirkelen blir den tilsvarende vektoren

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

og den har lengde $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, og dette kan vi skrive om til

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Bonus: med denne vektornotasjonen kan vi lett generalisere kula til høyere dimensjoner, selv om vi ikke lenger kan lage tegninger. Vi sier da at sfæren i dimensjon n med radius R og senter $(c_1, \dots, c_n)$ består av punktene $(x_1, \dots, x_n)$ som tilfredsstiller

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - c_k)^2 = R^2.$$

$\boxed{2}$ En funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$x(\theta, h) = \cos\theta$$
$$y(\theta, h) = \sin\theta$$
$$z(\theta, h) = h$$

Finn ut hva slags type flate det er dersom definisjonsmengden er $[0, 2\pi) \times [0, 1]$.

$(\theta, h) \in [0,2\pi) \times [0,1]$ betyr at $\theta \in [0,2\pi)$ og $h \in [0,1]$

Vi ignorerer z et øyeblikk. Siden h ikke dukker opp i x og y kan vi også ignorere den, så vi har

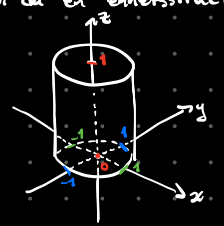
$$x(\theta) = \cos\theta \quad \text{og} \quad y(\theta) = \sin\theta.$$

Hvis du husker (eller slår opp) polarkoordinater, så hadde vi at punktet (r,θ) i polarkoordinater kunne skrives om til kartesiske koordinater (x,y) med formlene

$$x = r\cos\theta \quad \text{og} \quad y = r\sin\theta$$

$\Rightarrow$ $x(\theta)$ og $y(\theta)$ beskriver punkter på sirkelen med radius $r=1$.
Siden θ kan være alle verdier i $[0,2\pi)$, beskriver $x(\theta)$ og $y(\theta)$ hele enhetssirkelen.

Vi setter dette sammen med $z(\theta,h) = h$ som bare beskriver $[0,1]$.
For hvert par (θ, h) har vi da en enhetssirkel beskrevet av x og y, og verdien $z=h$.
Dette plotter vi som



Altså for hver verdi $h \in [0,1]$ har vi en kopi av enhetssirkelen. Og en kopi av enhetssirkelen langs alle verdier i $[0,1]$ beskriver da sylinderen med lengde 1 og radius 1 (uten lokk og bunn).
Vi kan altså tolke $z=h$ som høyden til sylinderen.

$\boxed{3}$ Hva med denne? Definisjonsmengden er $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$.

$$x(\theta, \phi) = \cos\theta\sin\phi$$
$$y(\theta, \phi) = \sin\theta\sin\phi$$
$$z(\theta, \phi) = \cos\phi$$

Hvis vi har valgt en verdi $\phi \in [0,\pi]$ $\Rightarrow$ $\sin\phi$ er bare et bestemt tall. Husk igjen formlene

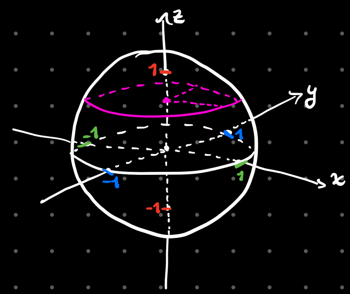
$$x = r\cos\theta \quad \text{og} \quad y = r\sin\theta$$

$\Rightarrow$ for hver $\phi \in [0,\pi]$ så beskriver $x(\theta,\phi)$ og $y(\theta,\phi)$ sirkelen med radius $r = \sin\phi$.

$\phi = 0 \Rightarrow$ punkt
fra $\phi = 0$ til $\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ radius øker opp til $r=1$
fra $\phi = \frac{\pi}{2}$ til $\phi = \pi \Rightarrow$ radius minker ned til 0 igjen

For $z(\theta, \phi) = \cos \phi$: fra $\phi = 0$ til $\phi = \pi$ $\Rightarrow$ $z = \cos \phi$ går fra 1 til -1

Til sammen: for hver $\phi \in [0, \pi]$ får vi en verdi på z-aksen mellom -1 og 1. Rundt z-aksen i denne z-verdien har vi en sirkel med radius $\sin \phi$. Gjør vi dette for alle $\phi \in [0, \pi]$ ender vi opp med



$\Rightarrow$ kule med origo som senter og radius 1.

Sjekke at det faktisk er kulen:

$$x(\theta,\phi)^2 + y(\theta,\phi)^2 + z(\theta,\phi)^2 = \underline{\cos^2\theta}\,\sin^2\phi + \underline{\sin^2\theta}\,\sin^2\phi + \cos^2\phi$$

$$= \sin^2\phi + \cos^2\phi$$

$$= 1$$

De to forrige oppgavene beskriver egentlig sylindriske koordinater (cylindrical coordinates) og kulekoordinater/sfæriske koordinater (spherical coordinates)

Nå skal vi se på hvordan vi regner ut overflatearealet til en parametrisert flate.

$\boxed{4}$ En flate S er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

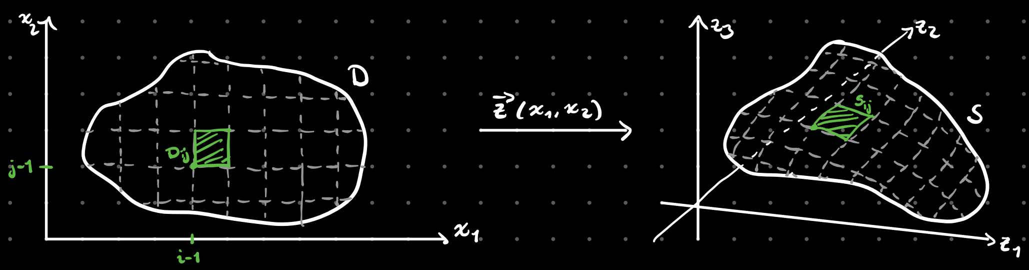
der $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Les kap. 15.5 i Adams og forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

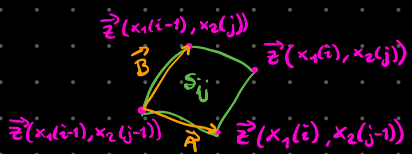
$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| \, d\mathbf{x}$$

Se også her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface`

Flaten er parameterisert av $\vec{z}(x_1, x_2)$

Del $D \subseteq \mathbb{R}^2$ opp i mindre biter D_{ij} (tenk kvadrater for å holde det enkelt). Hver D_{ij} blir til en liten overflate i $\mathbb{R}^3$.





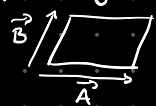
vi har $\vec{A} = \vec{z}(x_1(i), x_2(j-1)) - \vec{z}(x_1(i-1), x_2(j-1))$

og $\vec{B} = \vec{z}(x_1(i-1), x_2(j)) - \vec{z}(x_1(i-1), x_2(j-1))$

Lineærapproksimasjon $\Rightarrow$ $\vec{A} \approx \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1(i)$ hvor $\Delta x_1(i) = x_1(i) - x_1(i-1)$

$\vec{B} \approx \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2(j)$ hvor $\Delta x_2(j) = x_2(j) - x_2(j-1)$

Arealet til et parallelogram $= |\vec{A} \times \vec{B}|$ ("x" er kryssproduktet)



$\Rightarrow$ Arealet til $S_{ij} \approx |\vec{A} \times \vec{B}| = \left| \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1(i) \times \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2(j) \right| = \left| \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right| \Delta x_1(i) \Delta x_2(j)$

$\Rightarrow$ tilnærming til arealet av hele overflaten S:

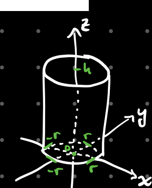
$$\sum_j \sum_i \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right| \Delta x_1(i) \Delta x_2(j)$$

Dette er en riemannsum. La størrelsene til $D_{ij} \longrightarrow 0$, da får vi

$$\text{areal}(S) = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right| d\vec{x}$$

$\boxed{5}$ Vis at overflatearealet til den krumme delen av en sylinder med radius r og høyde h er $A = 2\pi r h$.

Bruk sylinderkoordinater (parameteriseringen fra oppg. 2)



La $\vec{u}: \underbrace{[0, 2\pi) \times [0, h]}_{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{u}(\theta, t) = \begin{bmatrix} x(\theta,t) \\ y(\theta,t) \\ z(\theta,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ t \end{bmatrix}$

Vi vil bruke formelen fra forrige oppgave:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\Rightarrow A = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right| d\vec{x} = \int_0^{2\pi}\int_0^h r \, dt \, d\theta = \int_0^{2\pi} rh \, d\theta = \underline{\underline{2\pi rh}}$$

6 Vis at overflatearealet til en kule med ~~radis~~ radius r er $A = 4\pi r^{\cancel{3}\,2}$.

Nå bruker vi kulekoordinater (se oppg. 3):

La $\vec{u} : [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, $\vec{u}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{bmatrix}$

Utregning:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} \right| = \left\| \begin{bmatrix} -r^2\cos\theta\sin^2\phi \\ -r^2\sin\theta\sin^2\phi \\ -r^2\underline{\sin^2\theta}\cos\phi\sin\phi - r^2\underline{\cos^2\theta}\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -r^2\cos\theta\sin^2\phi \\ -r^2\sin\theta\sin^2\phi \\ -r^2\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{r^4\underline{\cos^2\theta}\sin^4\phi + r^4\underline{\sin^2\theta}\sin^4\phi + r^4\cos^2\phi\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{r^4\underline{\sin^2\phi}\cdot\sin^2\phi + r^4\underline{\cos^2\phi}\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{r^4\sin^2\phi} = r^2\sin\phi$$

$$\Rightarrow A = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} \right| d\vec{x} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big[-r^2\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -r^2(\cos(\pi) - \cos(0)) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\theta$$

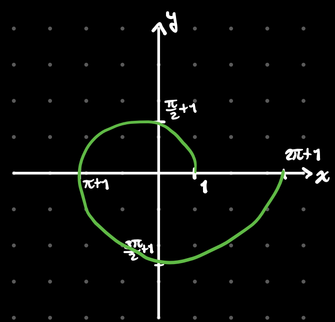
$$= 2r^2 \cdot 2\pi$$

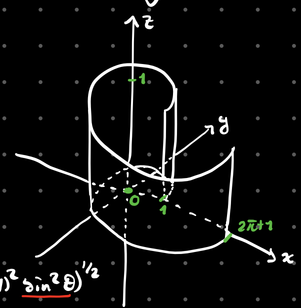
$$= \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

7 Kondensatorplater er ofte rullet opp for å spare plass:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor`
Skisser flaten $z : [0, 2\pi] \times [0, 1]$ gitt ved

$$\mathbf{z}(\theta, h) = \begin{bmatrix} (\theta+1)\cos\theta \\ (\theta+1)\sin\theta \\ h \end{bmatrix}$$

og finn arealet.





$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta - (\theta+1)\sin\theta \\ \sin\theta + (\theta+1)\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{z}}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial h} \right| = \left\| \begin{bmatrix} \sin\theta + (\theta+1)\cos\theta \\ -\cos\theta + (\theta+1)\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left(\sin^2\theta + \cancel{2(\theta+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta+1)^2\cos^2\theta + \cos^2\theta - \cancel{2(\theta+1)\cos\theta\sin\theta} + (\theta+1)^2\sin^2\theta \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{1 + (\theta+1)^2}$$

$$\Rightarrow A = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial h} \right| dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{(\theta+1)^2 + 1}\, dh\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta+1)^2 + 1}\, d\theta$$

$\int \sqrt{(\theta+1)^2 + 1}\, d\theta$ La $u = \theta + 1 \Rightarrow du = d\theta$

$\Rightarrow \int \sqrt{u^2+1}\, du$ La $v = \tan^{-1}(u) \Rightarrow u = \tan(v)$ og $du = \frac{1}{\cos^2(v)} dv = \sec^2(v)\, dv$

$$\Rightarrow \sqrt{u^2+1} = \sqrt{\tan^2(v) + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} + \frac{\cos^2(v)}{\cos^2(v)}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(v)}} = \frac{1}{\cos(v)} = \sec(v)$$

$$\Rightarrow \int \sec(v) \cdot \sec^2(v)\, dv = \int \sec^3(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sec(v)\tan(v) + \ln|\sec(v) + \tan(v)| \right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u^2+1}\, u + \underbrace{\ln\left|\sqrt{u^2+1} + u\right|}_{\sinh^{-1}(u)} \right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\theta+1)^2+1}\,(\theta+1) + \sinh^{-1}(\theta+1) \right) + c$$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\theta+1)^2+1}\,(\theta+1) + \sinh^{-1}(\theta+1) \right) \right]_0^{2\pi} \approx \underline{\underline{26.965}}$$

Analogt til linjeintegral, definerer vi flateintegral over skalarfelt som

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho \, dS = \iint_{D} \rho\left(\mathbf{z}(\mathbf{x})\right) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

der $\mathcal{S}$ er flaten parametrisert av $\mathbf{z}$ og D definisjonsmengden til $\mathbf{z}$. Du bør tenke på ρ som ladningstetthet per areal, og på flateintegralet som den totale ladningen på flaten $\mathcal{S}$. I praksis er det nok sjelden man regner ut integralet over for hånd, for hvis man har en kondensatorplate med ladningstetthet som ikke er konstant, har man ikke tilgang på et lukket uttrykk for ladningstettheten.