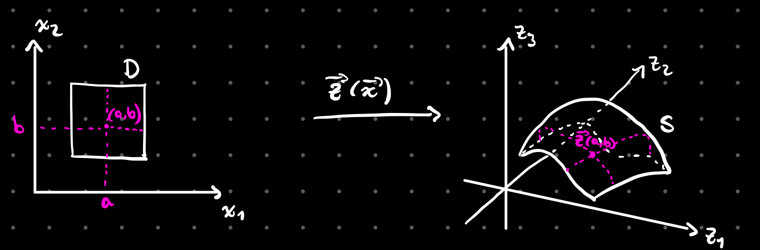
Fluksintegraler

Forrige uke: flateintegral av $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ over en flate S parameterisert av $\vec{z}: D \to \mathbb{R}^3$ for en $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Nå: Samme, men funksjonen vi integrerer er et vektorfelt $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

> 2 La flaten være parametrisert ved $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Forklar at de partiellderiverte
> $$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}$$
> begge er tangentvektorer til flaten. og at enhetsnormalvektoren til flaten er gitt ved
> $$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\right|}$$

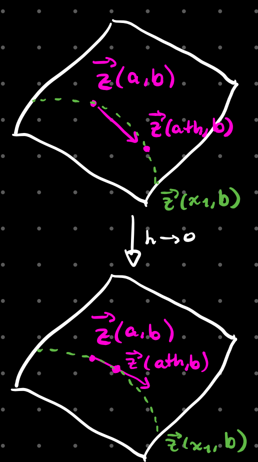
Tegningen: $\vec{z}: D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{z}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}$ hvor $D \subseteq \mathbb{R}^2$



Hvert punkt $(a,b) \in D$ gir oss en 3-dimensjonal punkt på flaten $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

De partiellderiverte er tangentene:

Husk def. for partiellderiverte: $\dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}(a,b) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\vec{z}(a+h, b) - \vec{z}(a,b)}{h}$



Vektoren $\dfrac{\vec{z}(a+h, b) - \vec{z}(a,b)}{h}$ peker fra $\vec{z}(a,b)$ og i retningen til $\vec{z}(a+h,b)$. Når $h \to 0$, altså h blir liten, beveger $\vec{z}(a+h,b)$ seg mot $\vec{z}(a,b)$.

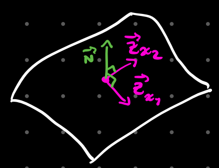
$\vec{z}(a+h,b)$ beveger seg langs kurven $\vec{z}(x_1, b)$ hvor b er konstant.

$\dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}$ blir da tangenten til denne kurven i punktet (a,b).

Siden kurven $\vec{z}(x_1, b)$ ligger i flaten S, er $\dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}$ også tangent til flaten.

Lignende for $\dfrac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}$.

Enhetsnormalen: Husk at hvis $\vec{a} \times \vec{b}$ er normal (ortogonal) på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



$\Rightarrow$ $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}$ er normal på både $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}$ og $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}$

$\Rightarrow$ normal på flaten også. Merk: normalen er ikke 0

Vi gjør en vektor til en enhetsvektor (norm = 1) ved å dele den på sin egen norm.

$\Rightarrow$ enhetsnormalvektoren må være definert som $\vec{N} = \dfrac{\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\right|}$.

$\boxed{3}$ Sett at vi har en flate $\mathcal{S}$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{N}$. Tegn og forklar at dersom vannstrømmen er gitt av $\mathbf{F}$, er strømmen gjennom et punkt på flaten (i liter per kvadratmeter eller noe slikt) gitt ved

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$$

og at den totale utstrømmningen gjennom flaten $\mathcal{S}$ (i liter) er

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\right| d\mathbf{x}$$

$$= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\, d\mathbf{x}$$

(Merk at vi har litt flaks her. Normaliseringsfaktoren i enhetsnormalvektoren til flaten er jo den samme som arealelementet i flateintegralet, og disse kansellerer på samme måte som de gjorde for linjeintegral over vektorfelt.)

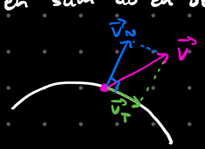
S er en flate i $\mathbb{R}^3$, den er parameterisert av

$\vec{z} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$

hvor $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

$\vec{F} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er et vektorfelt, altså for hvert punkt på flaten, $\vec{z}(x_1, x_2) \in S$, er $\vec{F}(\vec{z}(x_1, x_2))$ en 3-dimensjonal vektor.

Viktig fun fact: hvis $\vec{v}$ er en vektor på en kurve eller en flate, så kan vi skrive $\vec{v}$ som en sum av en vektor som er tangent og en som er normal til kurven/flaten



$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_N$

Dette kan vi gjøre for alle $\vec{F}(\vec{z}(\vec{x}))$.

Fluks = mengde vann som flyter gjennom flaten.

$\Rightarrow$ en vektor som er tangent, dermed parallell, til flaten vil ha fluks = 0.

Når vi studerer fluksen av $\vec{F}$ vil vi bare se på den normale delen av hver $\vec{F}(\vec{z}(\vec{x}))$.
Dette oppnår vi ved å se på $\vec{F} \cdot \vec{N}$ fordi for hver $\vec{x} \in D$ har vi

$$\vec{F}(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x})) = \left(\vec{F}_N(\vec{z}(\vec{x})) + \vec{F}_T(\vec{z}(\vec{x}))\right) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x}))$$

$$= \underbrace{\vec{F}_N(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x}))}_{\text{parallelle}} + \underbrace{\vec{F}_T(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x}))}_{\text{ortogonale}}$$

$$= \|\vec{F}_N(\vec{z}(\vec{x}))\| \cdot \|\vec{N}(\vec{z}(\vec{x}))\| \cdot \cos 0 \quad + \quad 0$$

$$= \|\vec{F}_N(\vec{z}(\vec{x}))\|$$

$\Rightarrow$ for å studere vannstrømmen gjennom punkter i S må vi se på $\vec{F} \cdot \vec{N}$.

Merk at for hver $\vec{x} \in D$ er $\vec{F}(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x}))$ en skalar, ikke en vektor. Så $\vec{F} \cdot \vec{N}$ er et skalarfelt.

$\Rightarrow$ summen av alle verdiene til $\vec{F} \cdot \vec{N}$ får vi dermed ved å bruke definisjonen på overflateintegral, som vi så forrige uke:

$$\iint_S \rho \, dS = \iint_D \rho(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x}$$

Altså den totale vannstrømmen gjennom S er gitt av

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_D \vec{F}(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{z}(\vec{x})) \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right| d\vec{x}$$

$$= \iint_D \vec{F}(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right|} \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right| d\vec{x}$$

$$= \iint_D \vec{F}(\vec{z}(\vec{x})) \cdot \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2} \right) d\vec{x}$$

Hvis du har skjønt alt over, kan vi gå over til det som er viktig for elmag, nemlig elektrisk fluks. Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dersom vektorfeltet i definisjonen av fluksintegral er et elektrisk felt, kalles linjeintegralet **den elektriske fluksen gjennom flaten**.

4 Regn ut den elektriske fluksen til en punktladning q plassert i origo gjennom et kuleskall (sentrert i origo) med radius R.

S = kule i $\mathbb{R}^3$ med senter 0 og radius R

$\Rightarrow$ bruk kulekoordinater : $\vec{z} : [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, $\vec{z}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R\cos\theta \sin\phi \\ R\sin\theta \sin\phi \\ R\cos\phi \end{bmatrix}$

Fra forrige gang : $\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -R^2\cos\theta \sin^2\phi \\ -R^2 \sin\theta \sin^2\phi \\ -R^2 \cos\phi \sin\phi \end{bmatrix}$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{z}(\theta,\phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2\cos^2\theta \sin^2\phi + R^2\sin^2\theta \sin^2\phi + R^2\cos^2\phi)^{3/2}} \begin{bmatrix} R\cos\theta \sin\phi \\ R\sin\theta \sin\phi \\ R\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2\sin^2\phi + R^2\cos^2\phi)^{3/2}} \begin{bmatrix} R\cos\theta \sin\phi \\ R\sin\theta \sin\phi \\ R\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \begin{bmatrix} R\cos\theta \sin\phi \\ R\sin\theta \sin\phi \\ R\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{z}(\theta,\phi)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -R^2 \cos\theta \sin^2\phi \\ -R^2 \sin\theta \sin^2\phi \\ -R^2 \cos\phi \sin\phi \end{bmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cancel{R^2}} \left(-\cancel{R^2} \underline{\cos^2\theta} \sin^3\phi - \cancel{R^2} \underline{\sin^2\theta} \sin^3\phi - \cancel{R^2} \cos^2\phi \sin\phi\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\underline{\sin^2}\phi \sin\phi + \underline{\cos^2}\phi \sin\phi\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\phi$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_D \vec{E}(\vec{z}(\theta,\phi)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi}\right) d\vec{x}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi$$

$$= -\frac{q}{2\epsilon_0} \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{q}{2\epsilon_0} \cdot 2 = \underline{\underline{-\frac{q}{\epsilon_0}}}$$

5 Hva med fluksen ut gjennom en eller annen sylinder?

S = sylinder med radius R og høyde h

$\Rightarrow$ sylinderkoordinater: $\vec{z} : [0, 2\pi) \times [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{z}(\theta, t) = \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ t \end{bmatrix}$

- $\dfrac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \vec{z}}{\partial t} = \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{z}(\theta,t)) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{(R^2\underline{\cos^2\theta} + R^2\underline{\sin^2\theta} + t^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ t \end{bmatrix}$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2+t^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{z}(\theta,t))\cdot\left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \vec{z}}{\partial h}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{(R^2+t^2)^{3/2}}\begin{bmatrix}R\cos\theta\\ R\sin\theta\\ t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}R\cos\theta\\ R\sin\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{R^2}{(R^2+t^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{E}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D \vec{E}(\vec{z}(\theta,t))\cdot\left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \vec{z}}{\partial t}\right)d\vec{x}$$

$$= \int_0^h\int_0^{2\pi}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{R^2}{(R^2+t^2)^{3/2}}\,d\theta\,dt$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot 2\pi\int_0^h\frac{R^2}{(R^2+t^2)^{3/2}}\,dt$$

La $t = R\tan(u) \Rightarrow dt = R\sec^2(u)\,du$ og $u = \tan^{-1}\left(\frac{t}{R}\right)$

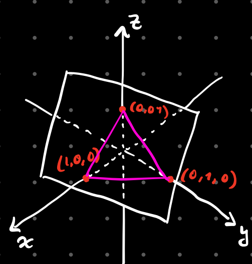
$$\Rightarrow (R^2+t^2)^{3/2} = \left(R^2(1+\tan^2(u))\right)^{3/2} = \left(R^2\sec^2(u)\right)^{3/2} = R^3\sec^3(u)$$

$$\Rightarrow \int\frac{R^2}{(R^2+t^2)^{3/2}}\,dt = \int\frac{R^2}{R^3\sec^3(u)}\,R\sec^2(u)\,du = \int\frac{1}{\sec(u)}\,du = \int\cos(u)\,du = \sin(u)+C$$

$$= \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{t}{R}\right)\right)+C = \frac{\frac{t}{R}}{\sqrt{\left(\frac{t}{R}\right)^2+1}}+C = \frac{t}{R\sqrt{\frac{1}{R^2}(t^2+R^2)}}+C = \frac{t}{\sqrt{t^2+R^2}}+C$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\epsilon_0}\int_0^h\frac{R^2}{(R^2+t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{q}{2\epsilon_0}\left[\frac{t}{\sqrt{t^2+R^2}}\right]_0^h = \underline{\underline{\frac{qh}{2\epsilon_0\sqrt{h^2+R^2}}}}$$

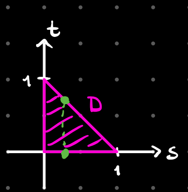
6 Hva med ut gjennom den triangulære flaten med hjørner $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$?



Flaten er det 3-dimensjonale planet gjennom de tre punktene, men hvor alle tre koordinatene er begrenset til verdiene i $[0,1]$.

Parametrisk beskrivelse av planet gjennom $\vec{P},\vec{Q},\vec{R}$: $\vec{P} + s(\vec{Q}-\vec{P}) + t(\vec{R}-\vec{P})$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-s-t\\ s\\ t\end{bmatrix}$$



La $u : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u(s,t) = \begin{bmatrix}1-s-t\\ s\\ t\end{bmatrix}$ hvor $D = \{(s,t)\in[0,1]\times[0,1] \mid 0\le t\le 1-s\}$.

u er en parameterisering av trekanten.

Sjekk: $u(0,0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $u(1,0) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $u(0,1) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$