Trippelintegral

La oss begynne med noe enkelt. I oppgaven under er integrasjonsområdet en rektangulær boks. Integralene utføres fra innerst til ytterst.

$\boxed{2}$ Regn ut

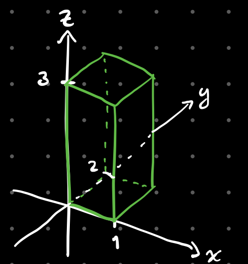
$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x^2y + z \, dzdydx.$$

Dersom ~~x^2y+z~~ x^2y+z er massetetthet, hvordan vil du tolke det innerste integralet

$$\int_0^3 x^2y + z \, dz?$$

Hva med de to innerste integralene

$$\int_0^2 \int_0^3 x^2y + z \, dzdy?$$



$$\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^2y+z \, dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^2 \left[x^2yz + \frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=3} dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^2 3x^2y + \frac{9}{2} \, dy\,dx$$

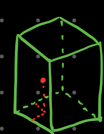
$$= \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{9}{2}y\right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 6x^2 + 9 \, dx$$

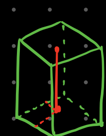
$$= \left[2x^3 + 9x\right]_0^1$$

$$= 2 + 9$$

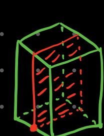
$$= \underline{\underline{11}}$$



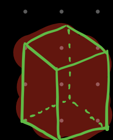
$f(x,y,z) = x^2y + z$ = massetetthet = masse/punkt



$\Rightarrow g(x,y) = \int_0^3 f(x,y,z)\,dz$ = masse/vertikal linje



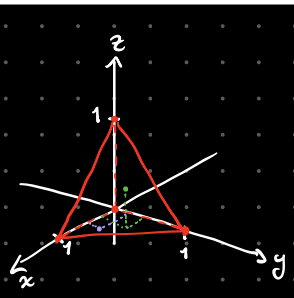
$\Rightarrow h(x) = \int_0^2 g(x,y)\,dy$ = masse/plan som er parallell med yz-aksen



$\Rightarrow \int_0^1 h(x)\,dx$ = total masse

Det vanskelige kommer når integrasjonsområdet ikke er rektangulært. La oss prøve Adams sitt eksempel med tetraederformet integrasjonsområde. I de tre neste oppgavene er T et tetraeder med hjørner i $\underbrace{(0,0,0)}_{O}$, $\underbrace{(1,0,0)}_{X}$, $\underbrace{(0,1,0)}_{Y}$ og $\underbrace{(0,0,1)}_{Z}$.

$\boxed{3}$ Overflaten til T består av fire plan som har hver sin likning. Finn dem.



Planet gjennom $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$: $\vec{P} + s(\vec{Q} - \vec{P}) + t(\vec{R} - \vec{P})$

Planet gjennom X, Y og Z:

$$Z + s(X - Z) + t(Y - Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1-s-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{bmatrix}$$

hvor $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ og $z = 1-x-y$

Planet gjennom O, X og Y : $O + s(X - O) + t(Y - O) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ hvor $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $z = 0$

Planet gjennom O, Y, Z : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix}$ hvor $x = 0$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1-y$

Planet gjennom O, X, Z : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ hvor $0 \le x \le 1$, $y = 0$, $0 \le z \le 1-x$

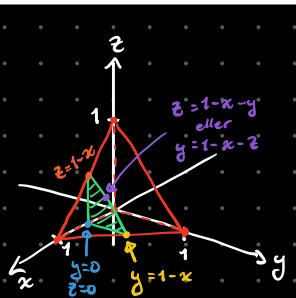
Kan bruke andre grenser ved å bytte om på rekkefølgen. E.g. $0 \le z \le 1$, $y = 0$, $0 \le x \le 1-z$ for det siste planet

$\boxed{4}$ Skriv opp integralet

$$\iiint_T x^2 y + z \, dV$$

på seks forskjellige måter.

1



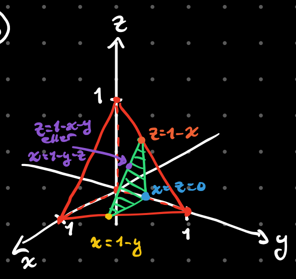
Rekkefølgen x, y, og så z: La $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le y \le 1-x \Rightarrow 0 \le z \le 1-x-y$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 y + z \, dz \, dy \, dx$$

2 Rekkefølgen x, z, y : $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le z \le 1-x \Rightarrow 0 \le y \le 1-x-z$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-z} x^2 y + z \, dy \, dz \, dx$$

③



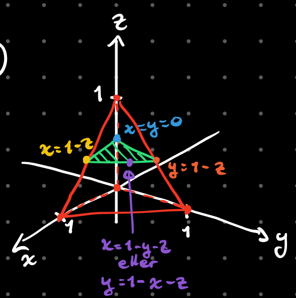
$y, x, z: \quad 0 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1-y \Rightarrow 0 \le z \le 1-x-y$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x-y} x^2y + z \, dz \, dx \, dy$$

④ $y, z, x: \quad 0 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le z \le 1-y \Rightarrow 0 \le x \le 1-y-z$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-z} x^2y + z \, dx \, dz \, dy$$

⑤



$z, x, y: \quad 0 \le z \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1-z \Rightarrow 0 \le y \le 1-x-z$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} x^2y + z \, dy \, dx \, dz$$

⑥ $z, y, x: \quad 0 \le z \le 1 \Rightarrow 0 \le y \le 1-z \Rightarrow 0 \le x \le 1-y-z$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} x^2y + z \, dx \, dy \, dz$$

$\boxed{6}$ Et område D er definert ved gitt ved ulikhetene $0 \le z \le 1 - |x| - |y|$. Skisser området og skriv opp

$$\iiint_D x^2y + z \, dV$$

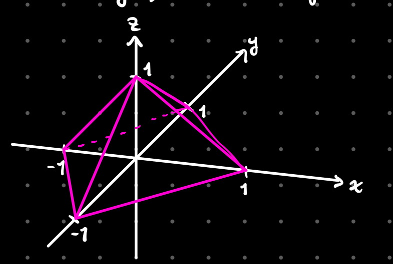
på seks forskjellige måter. (Oppg 14.5.7 fra Adams.) Eksamen: ... og regn ut.

Siden $0 \le z$ må vi i hvert fall ha $|x| \le 1$ og $|y| \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$ og $-1 \le y \le 1$.

Men for å sikre at $0 \le z$ må vi også ha $|x| + |y| \le 1 \Rightarrow |y| \le 1 - |x| \Rightarrow -(1-|x|) \le y \le 1 - |x|$
(eller $-(1-|y|) \le x \le 1-|y|$)

Dermed består D av punktene $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som tilfredsstiller $-1 \le x \le 1$, $-1+|x| \le y \le 1-|x|$, og $0 \le z \le 1-|x|-|y|$

$\Rightarrow$



Figuren er en pyramide hvor grunnflaten har sidelengder $\sqrt{2}$ og høyden i pyramiden er 1.

Rekkefølger: $x\,y\,z \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow -1+|x| \le y \le 1-|x| \Rightarrow 0 \le z \le 1-|x|-|y|$

$y\,x\,z \Rightarrow -1 \le y \le 1 \Rightarrow -1+|y| \le x \le 1-|y| \Rightarrow 0 \le z \le 1-|x|-|y|$

$x\,z\,y \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le z \le 1-|x| \Rightarrow -1+|x|+z \le y \le 1-|x|-z$

$y\,z\,x \Rightarrow -1 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le z \le 1-|y| \Rightarrow -1+|y|+z \le x \le 1-|y|-z$

$z\,x\,y \Rightarrow 0 \le z \le 1 \Rightarrow -1+z \le x \le 1-z \Rightarrow -1+|x|+z \le y \le 1-|x|-z$

$z\,y\,x \Rightarrow 0 \le z \le 1 \Rightarrow -1+z \le y \le 1-z \Rightarrow -1+|y|+z \le x \le 1-|y|-z$

$$\Rightarrow \iiint_D x^2y+z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1+|x|}^{1-|x|}\int_0^{1-|x|-|y|} x^2y+z\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1+|x|}^{1-|x|}\left[x^2yz+\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1+|x|}^{1-|x|} \underbrace{x^2y(1-|x|-|y|)}_{\text{odde mhp } y} + \frac{1}{2}\underbrace{(1-|x|-|y|)^2}_{\text{jevn mhp } y}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-|x|} 0 + \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{1}}{2}(1-|x|-y)^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-|x|} x^2-2|x|+1+2|x|y-2y+y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[(x^2-2|x|+1)y+(|x|-1)y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1-|x|} dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\underbrace{(x^2-2|x|+1)}_{(1-|x|)^2}(1-|x|)+\underbrace{(|x|-1)}_{-(1-|x|)}(1-|x|)^2+\frac{1}{3}(1-|x|)^3\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\cancel{(1-|x|)^3}-\cancel{(1-|x|)^3}+\frac{1}{3}(1-|x|)^3\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{3}\underbrace{(1-|x|)^3}_{\text{jevn}}\,dx$$

$$= 2\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 1-3x+3x^2-x^3\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Husk: $\int_{-L}^{L}\text{odde} = 0$

$\int_{-L}^{L}\text{jevn} = 2\int_0^L\text{jevn}$

$f(y) = x^2y(1-|x|-|y|)$

$f(-y) = -x^2y(1-|x|-|y|)$

$= -f(y) \Rightarrow f$ odde

jevn: $g(-x) = g(x)$

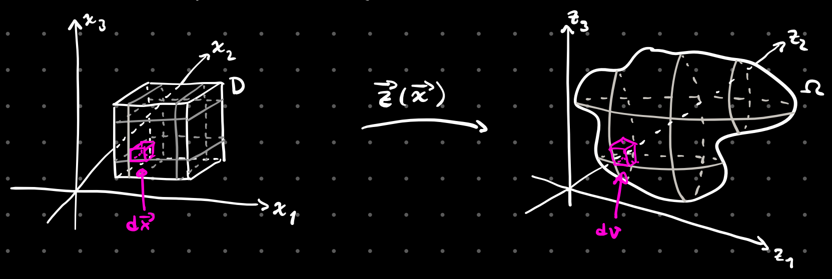
7 La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \to \mathbf{R}^3$, der $D \in \mathbb{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom $\mathbf{z}$. Forklar at volumet til Ω er

$$\int_\Omega d\mathbf{z} = \int_D \left|\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}\times\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3}\right| d\mathbf{x}$$

(Hint: Akkurat samme triks som for dobbeltintegral og flateintegral.)

Eksamen: vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$

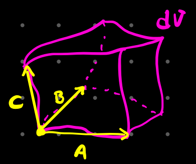
$\vec{z} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er en parameterisering av $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, hvor $D \subseteq \mathbb{R}^3$.



Vi vil finne volumet til Ω.

På lignende vis som tidligere så deler vi D opp i små deler $d\vec{x}$, som vil si at vi også deler Ω i små deler dV.

Hver dV ligner på et parallellepiped (særlig når $d\vec{x}$ blir liten). Sidene i nesten-parallellepipedet approksimeres av vektorene $\vec{A}$, $\vec{B}$, og $\vec{C}$. Og ved hjelp av lineærapproksimasjon er de approksimert som:



$$\vec{A} \approx \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 \qquad \vec{B} \approx \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2 \qquad \vec{C} \approx \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_3}\cdot\Delta x_3$$

Husk: volum av parallellepiped med sider gitt av vektorene $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \Rightarrow \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ ← trippelproduktet

$\Rightarrow$ volumet til dV $\approx |\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$ (abs. verdi for å sikre volum ≥ 0)

$$\approx \left|\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}\Delta x_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\Delta x_2 \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial x_3}\Delta x_3\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}\cdot\left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_3}\right)\right| \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

$$\Rightarrow \text{volumet til } \Omega \approx \sum\sum\sum \left|\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}\cdot\left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_3}\right)\right| \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

Dette er en riemannsum. La $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \text{volum}(\Omega) = \iiint_\Omega d\vec{z} = \iiint_D \left|\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_1}\cdot\left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \vec{z}}{\partial x_3}\right)\right| d\vec{x}$$

Ω = kule med radius r $\Rightarrow$ parameteriser med kulekoordinater

$$\vec{z} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, r], \quad \vec{z}(\theta, \phi, t) = \begin{bmatrix} t\cos\theta \sin\phi \\ t\sin\theta\sin\phi \\ t\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -t\sin\theta\sin\theta \\ t\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} t\cos\theta \cos\phi \\ t\sin\theta\cos\phi \\ -t\sin\phi \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -t^2\cos\theta\sin^2\phi \\ -t^2\sin\theta\sin^2\phi \\ -t^2\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi} = -t^2\cos^2\theta\sin^3\phi - t^2\sin^2\theta\sin^3\phi - t^2\cos^2\phi\sin\phi$$

$$= -t^2\sin^2\phi\sin\phi - t^2\cos^2\phi\sin\phi$$

$$= -t^2\sin\phi$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega dV = \iiint_D \left| \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{z}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{z}}{\partial \phi} \right| d\vec{x}$$

$$= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t^2 \sin\phi \; d\theta \, d\phi \, dt$$

$$= 2\pi \int_0^r \int_0^\pi t^2 \sin\phi \; d\phi \, dt$$

$$= 2\pi \int_0^r t^2 \Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} dt$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^r t^2 \, dt$$

$$= 4\pi \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} r^3}}$$

8 Regn ut

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

der $R = \{(x,y,z) : 0 \le x^2+y^2 \le 9 \text{ og } 0 \le z \le 5\}$.

$0 \le x^2+y^2 \le 9 = 3^2 \Rightarrow$ sirkler med radius $r \in [0,3]$

$\Rightarrow R =$ sylinder (fylt inn) med radius 3 og høyde 5

Sylinderkoordinater: $\vec{u} : \underbrace{[0,2\pi) \times [0,5] \times [0,3]}_{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{u}(\theta,h,r) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ h \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial h} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + h^2 = r^2+h^2$$

$$\Rightarrow \iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV = \iiint_D \left(x(\theta,h,r)^2 + y(\theta,h,r)^2 + z(\theta,h,r)^2\right) \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial h} \right| d\vec{x}$$

$$= \int_0^3 \int_0^5 \int_0^{2\pi} (r^2+h^2)r \, d\theta \, dh \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 \int_0^5 r^3 + rh^2 \, dh \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left[r^3h + \frac{1}{3}rh^3 \right]_{h=0}^{h=5} dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 5r^3 + \frac{125}{3}r \, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{5}{4}r^4 + \frac{125}{6}r^2 \right]_0^3$$

$$= 2\pi \left(\frac{5}{4} \cdot 81 + \frac{125}{6} \cdot 9 \right)$$

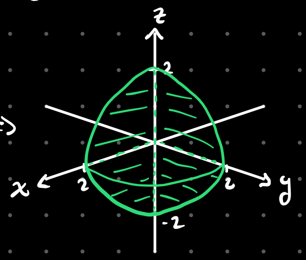
$$= \underline{\underline{\frac{1155}{2}\pi}}$$

12 Finn

$$\iiint_R z\, dV$$

der R er området i rommet avgrenset av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, xz-planet, yz-planet, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 = 2^2 \implies$ kule med radius 2 og senter 0.

$\implies$ 

R er en kvart ball. Tenk appelsinbåt.

Kulekoordinater: $u : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, $u(\theta, \phi, r) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \sin\phi \\ r\sin\theta \sin\phi \\ r\cos\phi \end{bmatrix}$

11 Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

For god forklaring av massesenter og utledning av formlene, se Feynman lectures Vol. I, kap. 18.1 (linken i ERT-filen).

Forsøk på forklaring fra en ikke-fysiker: Tenk at du kaster en ball gjennom luften. Så lenge det ikke er noen annen kraft på ballen (e.g. vind) så forventer vi at ballen beveger seg gjennom luften som en parabel. Hvis ballen ikke roterer vil jo hvert punkt i og på ballen også bevege seg langs parabler. Men i realiteten roterer nok ballen, så bevegelsen til et spesifikt punkt på ballen er nok litt mer komplisert.

Enda mer komplisert blir det hvis vi i stedet kaster en mer komplisert figur, f.eks. en hestesko. Når den flyr gjennom luften kan den rotere og vrikke seg, så banen til et spesifikt punkt på hesteskoen blir komplisert å beskrive. Men totalt sett så ser det jo ut som hele hesteskoen reiser i en parabel.

Forklaringen er at ballen, hesteskoen, eller andre objekter vi kaster har et punkt som faktisk reiser langs en parabel, og dette punktet er massesenteret til objektet.

Massesenteret til et objekt kan forstås som et punkt som fungerer som et slags gjennomsnitt med en vekting som tar hensyn til massefordelingen i objektet.

For eksempel vil massesenteret på en rett stokk være på midten av stokken, mens på et kosteskaft vil det være nærmere enden med kosten.

Massesenteret trenger ikke engang å være i det faktiske objektet, se f.eks. hesteskoen.

Formler: Vi ser på et objekt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ med massetetthet beskrevet av en funksjon $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Den totale massen i objektet blir da $M = \iiint_\Omega f(\vec{x})\, d\vec{x}$

Massesenteret er da punktet $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ som vi finner med formlene

$$m_1 = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x_1 f(\vec{x})\, d\vec{x} \qquad m_2 = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x_2 f(\vec{x})\, d\vec{x} \qquad m_3 = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x_3 f(\vec{x})\, d\vec{x}$$

Utregning: vi har konstant massetetthet, så skriv $f(x,y,z) = c$.

Uansett hvilken figur vi jobber med får vi da at massen blir:

$$\text{masse}(\Omega) = \iiint_\Omega c \, dV = c \iiint_\Omega dV = c \cdot \text{volum}(\Omega)$$

Siden vi vet (fra en annen oppgave) at volum(kule) $= \frac{4\pi}{3} r^3$ hvor r er radiusen til kulen, får vi at massen til kulebitene blir

$$M = \frac{4\pi r^3}{3n}$$

hvor $n = 2, 4$, eller 8 tilsvarer halv-, kvart- og åttendedelskula respektivt.

Vi bruker kulekoordinater for å beskrive kulebitene, hvor kulen har radius r:

$$u : \underbrace{\left[0, \tfrac{2\pi}{n}\right] \times [0, \pi] \times [0, r]}_{D}, \quad u(\theta, \phi, t) = \begin{bmatrix} t\cos\theta\sin\phi \\ t\sin\theta\sin\phi \\ t\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\theta,\phi,t) \\ x_2(\theta,\phi,t) \\ x_3(\theta,\phi,t) \end{bmatrix}$$

hvor $n = 2, 4, 8$.

Volumelementet: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -t\sin\theta\sin\phi \\ t\cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} t\cos\theta\cos\phi \\ t\sin\theta\cos\phi \\ -t\sin\phi \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -t^2\cos\theta\sin^2\phi \\ -t^2\sin\theta\sin^2\phi \\ -t^2\underline{\sin^2\theta}\cos\phi\sin\phi - t^2\underline{\cos^2\theta}\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2\cos\theta\sin^2\phi \\ -t^2\sin\theta\sin^2\phi \\ -t^2\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} = -t^2\underline{\cos^2\theta}\sin^3\phi - t^2\underline{\sin^2\theta}\sin^3\phi - t^2\cos^2\phi\sin\phi$$

$$= -t^2\sin^3\phi - t^2\cos^2\phi\sin\phi$$

$$= -t^2\underline{\sin^2\phi}\sin\phi - t^2\underline{\cos^2\phi}\sin\phi$$

$$= -t^2\sin\phi$$

$$\Rightarrow d\vec{x} = dV = \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} \right| d\theta \, d\phi \, dt = t^2\sin\phi \, d\theta \, d\phi \, dt$$

Massesenter generelt:

$$m_1 = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x_1 f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \frac{1}{M}\iiint_D x_1(\theta,\phi,t) \, c \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial \phi} \right| d\theta \, d\phi \, dt$$

$$= \frac{c}{M} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \int_0^r \int_0^\pi t\cos\theta\sin\phi \cdot t^2\sin\phi \, d\phi \, dt \, d\theta$$

$$= \frac{c}{M} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \int_0^r \int_0^\pi t^3\cos\theta\sin^2\phi \, d\phi \, dt \, d\theta$$

$\sin^2\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\phi))$

$$= \frac{C}{M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r t^3\cos\theta\left[\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} dt\, d\theta$$

$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$

$\phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\phi = 0$

$$= \frac{C}{M}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi/n}\int_0^r t^3\cos\theta\, dt\, d\theta \qquad = \frac{\pi C}{2M}\int_0^{2\pi/n}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{t=0}^{t=r}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{C\pi}{2M}\cdot\frac{r^4}{4}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\cos\theta\, d\theta \qquad = \frac{C\pi r^4}{8M}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{n}} \qquad = \underline{\underline{\frac{1}{M}\cdot\frac{C\pi r^4}{8}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$$

$$m_2 = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x_2 f(\vec{x})\, d\vec{x} \qquad = \frac{1}{M}\iiint_D x_2(\theta,\phi,t)\, C\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial\phi}\right| d\theta\, d\phi\, dt$$

$$= \frac{C}{M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r\int_0^\pi t\sin\theta\sin\phi\cdot t^2\sin\phi\, d\phi\, dt\, d\theta$$

$$= \frac{C}{M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r\int_0^\pi t^3\sin\theta\sin^2\phi\, d\phi\, dt\, d\theta$$

integralene over ϕ og t gir det samme som i m_1

$$= \frac{C\pi r^4}{8M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{C\pi r^4}{8M}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{n}} = \underline{\underline{\frac{1}{M}\cdot\frac{C\pi r^4}{8}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}}$$

$$m_3 = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x_3 f(\vec{x})\, d\vec{x} \qquad = \frac{1}{M}\iiint_D x_3(\theta,\phi,t)\, C\left|\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial\phi}\right| d\theta\, d\phi\, dt$$

$$= \frac{C}{M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r\int_0^\pi t\cos\phi\cdot t^2\sin\phi\, d\phi\, dt\, d\theta$$

$\cos\phi\cdot\sin\phi = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$

$$= \frac{C}{M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r\int_0^\pi t^3\cdot\frac{1}{2}\sin(2\phi)\, d\phi\, dt\, d\theta$$

$$= \frac{C}{2M}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\int_0^r t^3\left[-\frac{1}{2}\cos(2\phi)\right]_0^\pi dt\, d\theta$$

0

$-\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi) - \cos(0)\right) = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Oppsummering så langt: vi har $n = 2, 4$, eller 8.

Total masse $= M = \frac{4c\pi}{3} r^3 \cdot \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M} = \frac{3n}{4c\pi r^3}$

Massesenteret $= \vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ hvor

$$m_1 = \frac{1}{M} \cdot \frac{c\pi r^4}{8} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{3n}{4c\pi r^3} \cdot \frac{c\pi r^4}{8} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{3nr}{32} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$m_2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{c\pi r^4}{8} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{3nr}{32} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$m_3 = 0 \leftarrow$ får dette i alle tilfellene

Til slutt:

- åttendedelskule, $n = 8$:

$$m_1 = \frac{3 \cdot 8r}{32} \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{3r}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3r}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3r \cdot \sqrt{2}}{8} \approx r \cdot 0.5303\ldots$$

$$m_2 = \frac{3r}{4}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3r}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx r \cdot 0.2196\ldots$$

$$m_3 = 0$$

- kvart kule, $n = 4$:

$$m_1 = \frac{3 \cdot 4r}{32} \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{3r}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3r}{8} = 0.375r$$

$$m_2 = \frac{3r}{8}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3r}{8} = 0.375r$$

$$m_3 = 0$$

- halvkule, $n = 2$:

$$m_1 = \frac{3 \cdot 2r}{32} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{3r}{16} \sin(0) = 0$$

$$m_2 = \frac{3r}{16}\left(1 - \cos(\pi)\right) = \frac{3r}{16} \cdot 2 = \frac{3r}{8} = 0.375r$$

$$m_3 = 0$$

Eksamenstips: dette er nok ikke den eneste måten å organisere utregningene på. Men som du nok ser så er det mye som gjentar seg hvis man skal skrive ut absolutt alt. Så for eksamen er det mye tid og tavleskriving man kan spare seg for hvis man har en ryddig måte å gjøre det på.