Vektorkalkulus

Har sett gradienten når vi jobber med et skalarfelt. E.g. for $n=3$:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{grad}(f) = \nabla(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}^T$$

Skal nå se på liguende for vektorfelt $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = [F_1(x_1,x_2,x_3) \quad F_2(x_1,x_2,x_3) \quad F_3(x_1,x_2,x_3)]^T$.

Vi lar **divergensen** til $\vec{F}$ være definert som

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \text{trace}\,(DF)$$

Merk at resultatet er et skalarfelt, <u>ikke</u> en vektor.

Huskeregel: tenk på $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$ som en vektor.
Da blir nettop divergens til $\vec{F}$ lik skalarproduktet $\nabla \cdot \vec{F}$.

∇ er egentlig ikke en vektor, så dette er ikke helt korrekt.
Men det gjør $\nabla \cdot$ og curl (lenger nede) lette å huske.

$\boxed{1}$ Finn divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

$F_1(x,y,z) = 10xy^2 \qquad F_2(x,y,z) = -5yz^2 \qquad F_3(x,y,z) = 9zx^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(10xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-5yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(9zx^2) \\ &= 10y^2 - 5z^2 + 9x^2 \\ &= 9x^2 + 10y^2 - 5z^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ La $\S_\epsilon$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius ϵ, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,0)$. La $\mathbf{N}$ være enhetsnormalen til $\S_\epsilon$ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint_{\S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Se Adams for bevis. Men løsningen er at det skal bli div $\vec{F}(0,0,0)$

$\Rightarrow$ divergensen = grensen av fluksen til $\vec{F}$ ut av $\S_\epsilon$ når volumet til $\S_\epsilon$ går mot 0.

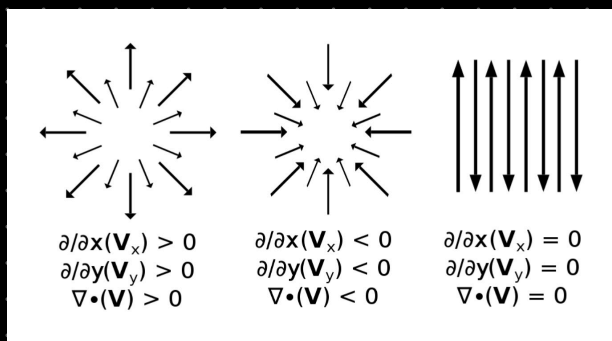
Merk: divergens er uavhengig av koordinatsystem. Finnes formler for div $\vec{F}$ i sylinder- og kulekoordinater.

Mer fysisk kan vi tolke div $\vec{F}$ som følgende: for en $\epsilon > 0$ beskriver integralet i oppgaven flukseintegralet av $\vec{F}$ for overflaten S_ϵ. Husk at fluks = strømninger fra $\vec{F}$ som går gjennom S_ϵ.

Når $\epsilon \to 0^+$ går S_ϵ mot et punkt (origo)

$\Rightarrow$ div $\vec{F}(0)$ = strømninger fra $\vec{F}$ ut eller inn i punktet 0.

Divergensen til $\vec{F}$ i et punkt beskriver dermed hvorvidt punktet funger som en kilde eller sluk for $\vec{F}$



Fra Wikipedia: "Divergence"
↳ anbefaler avsnittet "Physical Interpretation of Divergence"

Så grenseverdien over beskriver divergensen i et punkt.

Hvis vi har et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ og vil finne ut hva summen av div $\vec{F}(\vec{x})$ over alle $\vec{x} \in D$, så virker det logisk hvis resultatet beskriver den totale fluksen gjennom ∂D, overflaten til D.

Det er tilfellet og det gir oss:

Divergensteoremet / Gauss teorem

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

D kompakt
∂D stykkvis glatt
$\vec{F}$ kontinuerlig deriverbar

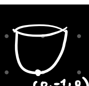
$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathbb{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

Regn ut

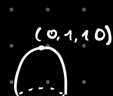
$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\mathbf{N}$ peker ut fra T.

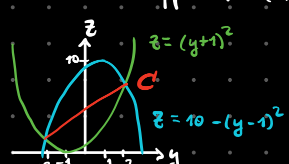
$z = x^2 + (y+1)^2 \longrightarrow$ paraboloide med bunnpunkt i $(x,y) = (0,-1) \Rightarrow z = 0$



$z = 10 - x^2 - (y-1)^2 \longrightarrow$ paraboloide med toppunkt i $(x,y) = (0,1) \Rightarrow z = 10$



Tegning i yz-planet:
(så $x = 0$ her)



Fra tegningen ser vi greit at hvis x og y er valgt, da må vi ha $x^2+(y+1)^2 \le z \le 10-x^2-(y-1)^2$.

For å finne grensene til x og y finner vi projeksjonen av C ned i xy-planet. C består av punkter som er innenfor begge paraboloidene. Vi finner dermed xy-projeksjonen ved å sette uttrykkene lik hverandre slik at vi eliminerer z, som følgende:

$$x^2+(y+1)^2 = z = 10-x^2-(y-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+2y+1 = 10-x^2-y^2+2y-1$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2y^2 = 10-1-1 = 8$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2 = 4 = 2^2$$

Projeksjonen av hele T ned i xy-planet er dermed disken med senter 0 og radius 2.

For å beskrive hele T_{xy} kan vi bruke polarkoordinater (med radius som variabel!):

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta \qquad \text{hvor } 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Til slutt: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) = 1+1+0 = 2$

Dermed bruker vi divergensteoremet for å løse integralet:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial T} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS &= \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV \\
&= 2\iint_{T_{xy}} \int_{x^2+(y+1)^2}^{10-x^2-(y-1)^2} dz\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{T_{xy}} 10-2x^2-2y^2-2\,dx\,dy \\
&= 4\iint_{T_{xy}} 4-(x^2+y^2)\,dx\,dy \\
&= 4\int_0^2\int_0^{2\pi} (4-r^2)\,r\,d\theta\,dr \\
&= 4\cdot 2\pi \int_0^2 4r-r^3\,dr \\
&= 8\pi\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 \\
&= 8\pi\left(2\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot 16\right) \\
&= \underline{\underline{32\pi}}
\end{aligned}$$

For $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = [F_1(x_1,x_2,x_3) \quad F_2(x_1,x_2,x_3) \quad F_3(x_1,x_2,x_3)]^T$ la curlen til $\vec{F}$ være definert som

$$\nabla\times\vec{F} = \left[\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right]^T$$

Resultatet er et vektorfelt.

Huskeregel: kryssproduktet av "vektoren" $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right]^T$ og $\vec{F}$.

1 Finn curlen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (10xy^2, -5yz^2, 9zx^2)$.

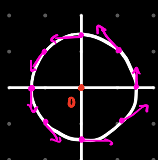
$$\nabla\times\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(9zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-5yz^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(10xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(9zx^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-5yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(10xy^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(-10yz) \\ 0 - 18xz \\ 0 - 20xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10yz \\ -18xz \\ -20xy \end{bmatrix}$$

2 La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2+y^2=\epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\oint_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,.$$

Tar ikke beviset, men resultatet skal bli $(\nabla\times\vec{F})(0,0,0)\cdot\hat{N}$ hvor $\hat{N}$ er enhetsnormalvektoren til disken med rand C_ϵ.

$\Rightarrow$ curl = grensen til linjeintegralet av $\vec{F}$ over C_ϵ når arealet til C_ϵ går mot 0.



Husk: linjeintegral av et vektorfelt var definert som

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

hvor $\vec{r}(t)$ med $a\le t\le b$ er en parameterisering av C.

For en $t\in[a,b]$ så er $\vec{r}(t)$ en posisjonsvektor for et punkt på C, og $\vec{r}\,'(t)$ blir da en tangent til punktet.

Tallet $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \|\vec{F}(\vec{r}(t))\|\,\|\vec{r}\,'(t)\|\cos\theta_t$ beskriver hvordan vektorfeltet $\vec{F}$ påvirker punktet på C i retningen bestemt av orienteringen vi har valgt på C. Det sier altså noe om rotasjonen forårsaket av $\vec{F}$.

Hele integralet $\oint_{C_\epsilon}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ beskriver dermed hvordan $\vec{F}$ påvirker alt langs den lukkede kurven C_ϵ i retningen til orienteringen.

Når $\epsilon\to 0^+$ blir C_ϵ igjen til et punkt, så grenseverdien sier noe om rotasjonen vi får fra $\vec{F}$ i punktet (uansett retning).

MEN $\vec{F}$ kan være $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ og rotasjonen beskrevet i $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ er dermed ikke nødvendigvis bare i planet.

Derfor må rotasjonen vi får etter at $\epsilon \to 0^+$ også ta hensyn til den potensielt 3. dimensjonen.

Enhetsnormalvektoren $\hat{\vec{N}}$ på disken med rand C_ϵ vil jo peke ut av planet som C_ϵ befinner seg i.

Dermed vil resultatet, $(\nabla \times \vec{F})(0) \cdot \hat{\vec{N}}$, beskrive rotasjonen i punktet 0 i retningen til $\hat{\vec{N}}$.

Eks. hvis $\hat{\vec{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så vil C_ϵ være i xy-planet. Så vil jo $(\nabla \times \vec{F})(0) \cdot \hat{\vec{N}}$ bare bli z-komponenten til vektoren $(\nabla \times \vec{F})(0)$.

Så $(\nabla \times \vec{F})(0) \cdot \hat{\vec{N}}$ beskriver rotasjonen i z-retningen.

Intuisjon fra Wikipedia: $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beskriver vannstrøm. Det er en ball i vannet, og pga vannstrømmen vil ballen rotere. Curlen til $\vec{F}$ evaluert på senteret til ballen vil peke i samme retning som rotasjonsaksen til ballen.

La $D \subseteq \mathbb{R}^3$ være stykkvis glatt med rand ∂D og enhetsnormalvektor $\vec{N}$, hvor ∂D består av stykkvis glatte, lukkede kurver hvis orientasjon nedstammer fra D. Hvis $\vec{F}$ er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder D, da har vi

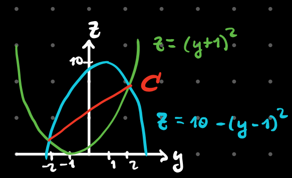
Stokes teorem

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

4 La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.



① Bruk $x = 2\cos\theta$ og $y = 2\sin\theta \Rightarrow$ finn uttrykk for $z \Rightarrow$ regn integralet direkte

② Med Stokes: C består av punkter som er på begge paraboloidene, så vi kan bruke ligningene for å finne et uttrykk for planet C ligger i:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y+1)^2 & = x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ z = 10 - x^2 - (y-1)^2 & = 10 - x^2 - y^2 + 2y - 1 \end{cases}$$

legg sammen

$$\Rightarrow \quad 2z = 10 + 4y \quad \Rightarrow \quad 0x - 2y + z = 5$$

$\Rightarrow$ en vektor som står normalt på planet C ligger i er $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi har:

$$\nabla \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y-x) \ , \ \frac{\partial}{\partial z}(x+y) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) , \ \frac{\partial}{\partial x}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2y - 0 \\ 0 - 2x \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ -2x \\ -2 \end{bmatrix}$$

La D være disken i planet $-2y+z=5$ med rand C.

Ved å bruke Stokes teorem får vi:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dS$$

$$= \iint_{T_{xy}} \begin{bmatrix} 2y \\ -2x \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$$

$$= \iint_{T_{xy}} \overbrace{4x}^{\text{odde mhp } x} - 2 \; dx\,dy \qquad \text{husk: } \int_{-L}^{L} \text{odde} = 0$$

$$= -2 \iint_{T_{xy}} dx\,dy$$

$$= -2 \underbrace{\int_0^2 \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr}_{\substack{\text{arealet av sirkel} \\ \text{med radius } r=2}}$$

$$= -2 \cdot \pi 4$$

$$= \underline{\underline{-8\pi}}$$