Fouriertransformasjon bonus

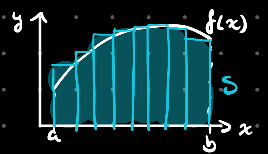
Husk: hvis $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er en funksjon og vi har en partisjon av intervallet

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

så er en **riemannsum** S for f med denne partsjonen definert som

$$S = \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

hvor $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ og $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ er valgt på en eller annen måte.



Geometrisk tolker vi riemannsummen som en approksimasjon til arealet under grafen til f.

I utledningen for fouriertransformasjon så starter vi med den komplekse fourierrekken til en T-periodisk funksjon $x(t)$, og vi viser at vi kan skrive den om til en riemannsum:

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) e^{\frac{2\pi i n}{T}(t-s)}\, ds \right) \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t,n)\,\Delta\lambda_n$$

hvor $\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}$, $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{2\pi}{T}$, og $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(t,n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) e^{\frac{2\pi i n}{T}(t-s)}\, ds$

litt usikker på om dette er helt rett måte å beskrive g på

Dette er altså ikke en riemannsum for x, men for g.

Så for å forstå hva denne riemannsummen beskriver er det egentlig g vi trenger å forstå.

Merk at x er definert på hele $\mathbb{R}$, ikke bare $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. For verdier utenfor $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ så gjentar bare x det som skjer inni intervallet, men vi kan evaluere x på hvilken som helst $t \in \mathbb{R}$.
Så når vi lar $T \to \infty$ så utvider vi ikke hvilke verdier det er lov å evaluere x på, men hvilke verdier som sier noe nytt om x.

Og velger vi en $t \in \mathbb{R}$ å evaluere x på må vi jo bruke den samme t-en i $g(t,n)$.

Husk at poenget med fourierrekker er jo å beskrive en (periodisk) funksjon som en sum av trigonometriske funksjoner. Så for hver n så er leddet fra fourierrekken

$$c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

og dette er uttrykket for én bølge.

Hele rekken blir dermed superposisjonen av uendelig mange bølger med forskjellige amplituder.

Dette betyr dessverre at det ikke er helt lett å tolke hva n og λ_n egentlig beskriver i riemannsummen.

Vi kan si med én gang at vi ikke ser på en partisjon av $\mathbb{R}$, som er der vi henter t-verdiene fra. Det gir mening siden $\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}$ ikke inneholder noen $t \in \mathbb{R}$.

Siden hver n tilsvarer én bølge i fourierrekken, kan vi tenke oss at den tilsvarende $g(t,n)$ sier noe om den samme bølgen.

Når vi lar steglengden $\Delta x_k \to 0$ i en riemannsum, så måtte vi også la $N \to \infty$ for å fortsatt ha nok rektangler til å dekke hele området under grafen til f. Altså når $\Delta x_k \to 0$ får vi også flere ledd i riemannsummen.

Det vil si at når vi lar $T \to \infty$ så må vi også få flere mulige verdier for n i riemannsummen vår. (Dette høres nok rart ut siden vi allerede har uendelig mange n-er fra før av, men det er faktisk det som skjer.)

I fourierrekke tolkningen så betyr flere n-er at det blir flere bølger i rekken. Tilsvarende inneholder da $g(t,n)$ informasjon om flere bølger også.

(OBS: rekken er strengt tatt ikke lenger en fourierrekke når vi lar $T \to \infty$, så det er litt upresist å fortsatt kalle den en fourierrekke.)

Etter å ha latt $T \to \infty$ ender vi som kjent opp med uttrykket

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-\lambda i s} \, ds \right) e^{\lambda i t} \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\lambda) e^{\lambda i t} \, d\lambda$$

Merk at g da blir hele uttrykket $\hat{x}(\lambda) e^{\lambda i t}$, ikke bare $\hat{x}(\lambda)$. Så når $T \to \infty$ så blir ikke g helt til fouriertransformasjonen.

Jeg er ikke helt stødig nok i dette til å forklare det godt, men fouriertransformasjonen $\hat{x}(\lambda)$ skal beskrive frekvensen til $x(t)$. g inneholder jo da noe litt ekstra.

Konklusjon: riemannsummen for g er nok mer utledet teoretisk, heller enn geometrisk. Så det er ikke helt lett å tegne opp g eller riemannsummen, men vi kan heldigvis fortsatt forstå det greit.

For å forstå $\hat{x}(t)$ litt bedre grafisk så anbefaler jeg å studere den første GIF-en på Wikipediasiden "Fourier transform", under "Introduction".

For mer filosofering rundt fouriertransformasjoner anbefales 3Blue1Browns video "But what is the Fourier Transform? A visual introduction."