

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4111 Matematikk 3 for MTELSYS, MTTK og MTKJ**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato: 11.12.2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: E: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☒

sort/hvit ☒ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1

- a) Siden grafen til f er et plan, er det klart at f ikke har noen kritiske punkt. Derfor vil f sine største og minste verdier ligge randen til området. La oss prøve Lagranges multiplikator metode. Gradienten til f er

$$f'(x) = (1, 2)$$

og randen til D er en nivåkurve til funksjonen

$$g(x) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (x_1 - x_2)^2$$

som har gradient

$$g'(x) = \frac{1}{2} (5x_1 - 3x_2, -3x_1 + 5x_2).$$

Likningen $\lambda f'(x) = g'(x)$ gir

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 &= \lambda \\ 3x_1 - 5x_2 &= 2\lambda \end{aligned}$$

som har entydig løsning

$$x = \frac{\lambda}{16} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Vi setter dette punktet inn i likningen for ellipsen:

$$\frac{9\lambda^2}{16} + \frac{\lambda^2}{64} = 1$$

som gir $\lambda = \pm \frac{8}{\sqrt{37}}$. Vi ser følgelig at

$$f(x) = f\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{8}{\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}\right) = \frac{37}{16} \cdot \frac{8}{\sqrt{37}} + 4 = \frac{\sqrt{37}}{2} + 4$$

må være maksimal verdi, og

$$f(x) = f\left(-\frac{1}{16} \cdot \frac{8}{\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}\right) = -\frac{\sqrt{37}}{2} + 4$$

må være minimal verdi.

- b) Ellipsen er dreid $\pi/4$ radianer rundt origo i forhold til hva du er vant til. Hvis du husker rotasjonsmatrisen fra TMA4101 og 4106, ser du forhåpentligvis at koordinattransformasjonen

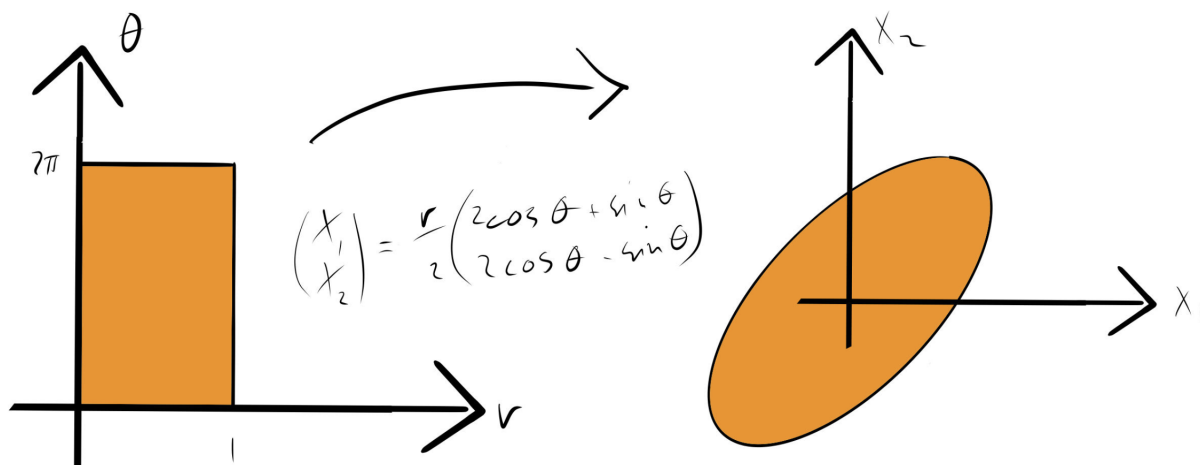
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

er en ren rotasjon, og at ellipselikningen blir

$$\frac{y_1^2}{2} + 2y_2^2 = 1$$

som forteller oss at halvaksene er $\sqrt{2}$ og $1/\sqrt{2}$. Videre ser du forhåpentligvis at en fornuftig koordinattransformasjon er

$$x(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}r \cos \theta \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta + \sin \theta \\ 2 \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}.$$



Vi beregner jacobideterminanten:

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right| = 2r$$

og integrerer:

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{2} (2 \cos \theta + \sin \theta) + 2 \left(\frac{r}{2} (2 \cos \theta - \sin \theta) \right) + 4 \right) r \, d\theta \, dr \\ &= 8\pi \int_0^1 r \, dr = 4\pi. \end{aligned}$$

- c) Det første vi må ha, er en fornuftig parametrisering for flaten. Dette er lett å skrive opp når vi har et uttrykk for flaten som en funksjon av to variable:

$$z(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right| = \sqrt{6},$$

slik at arealet blir

$$\int_D \left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \times \frac{\partial z}{\partial x_2} \right| dx = \sqrt{6}\pi$$

(Siden flateelementet er konstant, er det her bare å gange det med arealet av D , som er $\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi$.)

- d) Siden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

er definitivt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

For aficcionadoer kan det bemerkes at det ikke gir mening å spørre om en funksjon er harmonisk på randen av et område, så dette gjelder strengt tatt bare på det indre av D . Men det er en bagatell som ikke betyr særlig for en typisk ingeniør.

Oppgave 2 Vi beregner fartsvektoren

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

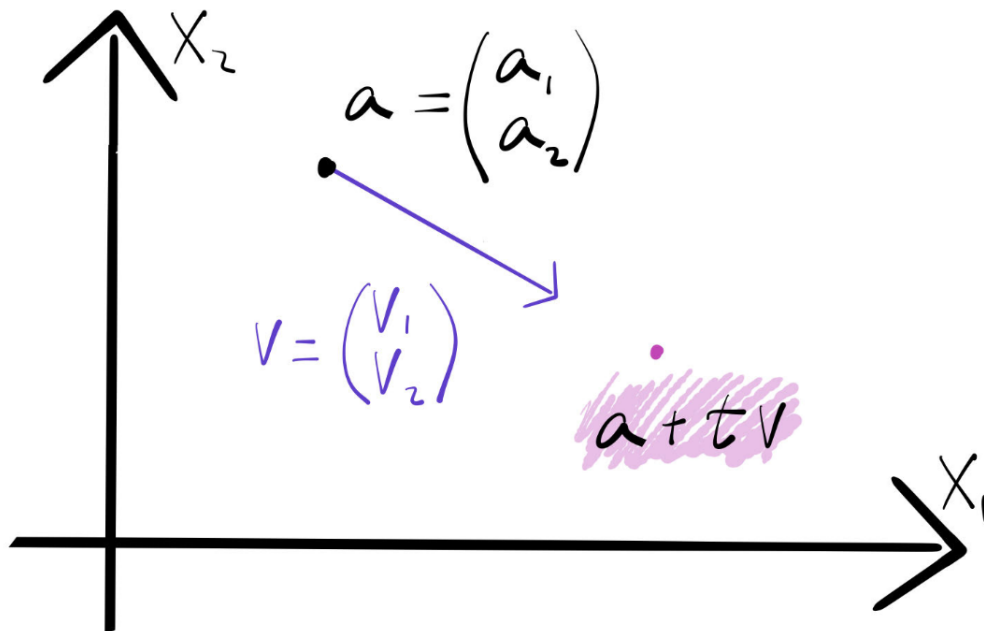
og banefarten

$$|\dot{\mathbf{z}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{4}t} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

og integrerer

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2} \right)_0^{2\pi} = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{2}\pi\right)^{3/2} - 1$$

Oppgave 3 La $\mathbf{a}$ være et av f sine kritiske punkt, og betrakt følgende figur:



Vi tar nå en motorsag og snitter flaten til $f(\mathbf{x})$ langs den parametriserte linjen $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$, og så Taylorutvikler vi motorsagsnittfunksjonen $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ om $t = 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \dots \\ &= f(\mathbf{a}) + (f'(\mathbf{a})\mathbf{v})t + \left(\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a})\mathbf{v}\right)\frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Her er f' gradienten

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]$$

og f'' hessematrisen

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

til f .

Merk hvordan gradienten f' er en radvektor og $\mathbf{v}$ er en søylevektor, slik at $g'(0) = f'(\mathbf{a})\mathbf{v}$ blir et skalarprodukt. Likeledes med den kvadratiske formen $g''(0) =$

$\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v}$, se diagonaliseringsøkten i TMA4106. Å utlede uttrykkene for $g'(0)$ og $g''(0)$ ganske trivielt. DERSOM man kan kjerneregelen, og antagelig umulig å forstå dersom man ikke kan kjerneregelen. Kjerneregelen i flere dimensjoner er ikke så vanskelig hvis man kan matriseregning, og den kommer hvert øyeblikk, så hold ut inntil videre.

Siden $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ dersom $\mathbf{a}$ er et kritisk punkt, blir Taylorutviklingen

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \left(\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} \right) \frac{t^2}{2} + \dots$$

Dersom t er bitteliten og f oppfører seg bra nok til at $\left(\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} \right) \frac{t^2}{2}$ fullstendig dominerer alle leddene som kommer etter, kan vi nå konkludere med følgende tabell. La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $f''(\mathbf{a})$.

- Dersom λ_1 og λ_2 er positive, er $\mathbf{a}$ et bunnpunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 er negative, er $\mathbf{a}$ et toppunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 har forskjellig fortegn, er $\mathbf{a}$ et sadelpunkt.
- Dersom en av dem er null, gir testen ingen konklusjon.

Hvordan kan vi være så freidige? Siden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

for alle funksjoner du kommer til å plages med¹ er $f''(\mathbf{a})$ symmetrisk, og følgelig ortogonalt diagonaliserbar. La $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ være ortogonale egenvektorer til $f''(\mathbf{a})$. Disse utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$, så vi kan alltid skrive

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$$

og regne ut den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)^T f''(\mathbf{a}) (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2) \\ &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)^T (\lambda_1 c_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 c_2 \mathbf{u}_2) \\ &= \lambda_1 \|c_1 \mathbf{u}_1\|^2 + \lambda_2 \|c_2 \mathbf{u}_2\|^2 \end{aligned}$$

¹Det finnes patologiske unntak, slik som for eksempel $\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, der de blandede andreordens partiellderiverte ikke er like, men disse er konstruert av matematikere for å krangle med folk som er uforsiktige nok til å påstå at de blandede andreordens partiellderiverte alltid er like.

Dette uttrykket er helt klart positivt for alle $\mathbf{v}$ i det første tilfellet, og konklusjonen følger siden vi følgelig alltid legger noe til $f(\mathbf{a})$ i nærheten av $\mathbf{a}$ når vi beveger oss bittelitt vekk fra $\mathbf{a}$. Samme resonnement dersom egenverdiene er negative. Dersom egenverdiene har forskjellig fortegn, kan vi bruke samme resonnement på $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ og $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ og konkludere med at det finnes en retning der vi går nedover og en retning der vi går oppover, slik at $\mathbf{a}$ er en sadel. Hvis en av egenverdiene er null, finnes det en retning der $\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} = 0$, og i så fall trenger vi flere ledd i Taylorrekken for å konkludere. Hvis begge egenverdier er null, er f et lineært polynom, og da gir det ikke mening å lete etter maks- eller minimumspunkter.

Oppgave 4 En klassiker. Siden

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi, \end{aligned}$$

må

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

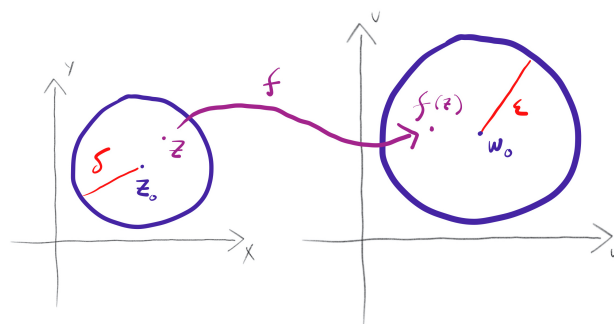
Oppgave 5

Vi sier at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon.$$



Vi sier at f er **deriverbar** i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På noen måter fungerer denne definisjonen akkurat som den du er vant til fra envariabel kalkulus; for eksempel er $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$ og $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$ og så videre. Men det er noen ting som er helt annerledes, siden det komplekse tallet h må få kunne reise inn mot z på vilkårlig vis.

La h reise mot $z = x + yi$ langs $h(t) = t$ (der $t \in \mathbb{R}$), altså en rett linje parallell med realaksen. Vi beregner

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

vi gjenta så eksperimentet med den rette linjen $h(t) = it$, slik at vi reiser inn i z parallelt med imaginæraksen.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) + iv(x, y+t) - u(x, y) - iv(x, y)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{iv(x, y+t) - iv(x, y)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

De to uttrykkene for f' må være identiske hvis $f'(z)$ skal eksistere, og da må real- og imaginærdelene være like. Dette kalles Cauchy-Riemann-likningene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dersom vi deriverer den første likningen med hensyn på x og den andre likningen med hensyn på y og antar at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

(dette er sant, men litt for hardt for oss å bevise), får vi

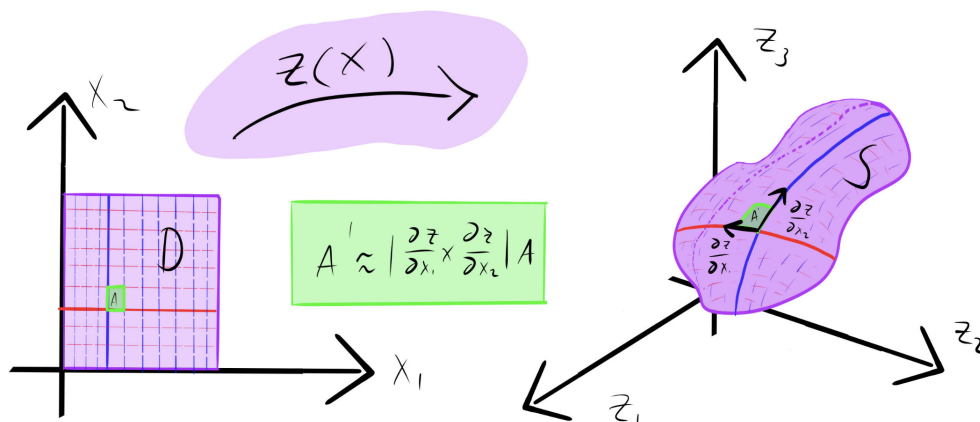
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Likeledes får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

ved å derivere C-R-likningene henholdsvis med hensyn y og x og anta likhet mellom de blandede dobbelderiverte til u (som nok en gang er sant, men for vanskelig for oss å bevise).

Oppgave 6 La oss først ta en titt på følgende figur:



Nå må vi se litt på hva transformasjonen $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ gjør med forskjellige ting i D . Det første man må forstå er at rette linjer parallelle med aksene i D blir kurver som ligger på flaten $\mathcal{S}$ i figuren til høyre, og at tangentvektorene til disse kurvene er de partiellderiverte til $\mathbf{z}(\mathbf{x})$. Det følger da at vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}$$

står normalt på flaten, og følgelig at

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|}$$

er en enhetsnormalvektor til flaten. Vi må selvfølgelig anta at ingen av de partiellderiverte er null. Rekkefølgen (altså fortegnet) på kryssproduktet avgjør om normalvektoren peker den ene eller den andre veien ut av flaten.

Dersom vi har et vektorfelt $\mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x}))$, er det dette vektorfeltets komponent normalt på flaten som forteller oss noe om hvor mye av vektorfeltet som strømmer gjennom flaten i hvert punkt. For å finne den totale strømmen gjennom flaten, må vi flateintegrere denne normalkomponenten:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D F(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right|} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| d\mathbf{x} \\ &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

og parametriseringen til et kuleskall med radius R er

$$\mathbf{z}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \phi \end{pmatrix}$$

slik at utnormalvektoren blir (merk rekkefølgen på faktoren slik at vi får ut- og ikke inn-normalvektor)

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta} = R^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Så beregner vi

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}(\theta, \phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Til slutt er det bare å integrere:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} R \cos \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \left(R^2 \sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right) d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \phi + \sin^2 \theta \sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi + \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Oppgave 7 Maxwells likninger på differensialform er:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

De to første kan vi trippelintegrere over området $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x}$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = 0$$

og massere med divergensteoremet på venstre side:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x}$$

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

De to siste kan vi fluksintegrere over flaten $\Sigma \in \mathbb{R}^3$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

og massere med Stokes' teorem på venstre side:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$