TMA4101/4106/4111/4121

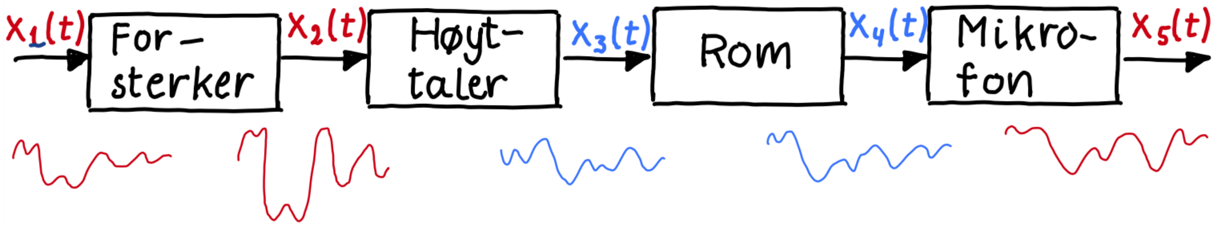
LUNDHEIM SPESIAL

I dette notatet skal vi studerer mer sofistikerte metoder for lineære systemer.

Systemer og operatorer

I systemteorien undersøker man hvordan ulike systemer samhandler og påvirker hverandre. Et system er "noe" som lar seg påvirke av noen systemer og som i sin tur påvirker andre. Vi kaller gjerne det som påvirker systemet en "inngang" og påvirkningen som systemet har på andre systemer, en "utgang". Påvirkningene modellerer vi som funksjoner av tid, og selve systemet som en operator på et rom av slike funksjoner.

En forsterker påvirker en høyttaler som i sin tur påvirker luften i et rom slik at der dannes lydbølger, som i sin tur kan påvirke en mikrofon. En slik kjede av systemer som påvirker hverandre gjennom tidsfunksjoner er vist i figuren under. Her har vi fire ulike systemer og fem ulike tidsfunksjoner som indikerer en kjede av påvirkninger mellom systemene. Funksjonene x_1, x_2 og x_5 representerer elektriske signaler, mens x_3 og x_4 uttrykker lufttrykk heholdsvis ved høyttaleren og ved mikrofonen.



Funksjonene i eksemplet over kan betraktes som elementer i et funksjonsrom, for eksempel $C^\infty(\mathbb{R})$, altså rommet av alle glatte (uendelig mange ganger deriverbare funksjoner). Hvert av systemene kan ses på som en operator på dette rommet, altså en "funksjon" $\mathcal{H}$ som tar inn en funksjon x og gir ut en annen funksjon y:

$$y = \mathcal{H}\left\{x\right\}.$$

Eksempler på en slik operatorer er derivasjonsoperatoren

$$y = D\left\{x\right\} = \dot{x},$$

eller høyresiden i en differensiallikning, slik som

$$y = L\{x\} = \ddot{x} + 2\dot{x} + x.$$

Lineære systemer og operatorer

Et system gitt ved operatoren $\mathcal{H}$ sies å være *lineært* dersom vi for alle konstanter a, b har at

$$\mathcal{H}\left\{ax + by\right\} = a\mathcal{H}\left\{x\right\} + b\mathcal{H}\left\{y\right\}.$$

Selve operatoren kalles da en lineæroperator.

Tidsinvariante systemer

Et system gitt ved operatoren $\mathcal{H}$ sies å være *tidsinvariant* dersom følgende gjelder:
Dersom inngangen $x(t)$ gir utgang $y(t) = \mathcal{H}\left\{x(t)\right\}$, vil

$$\mathcal{H}\left\{x(t-t_0)\right\} = y(t-t_0)$$

for alle t_0.

Hva betyr dette?

Et eksempel på et tidsinvariant system er en lineær elektronisk krets der alle komponenter har verdier som ikke varierer med tiden.
Men hvordan kan man bruke definisjonen for å avgjøre om et system er tidsinvariant? Det enkleste er å se på et eksempel på et system som *ikke* er tidsinvariant. La systemet $\mathcal{H}$ være definert ved $y(t) = \mathcal{H}\left\{x(t)\right\} = tx(t)$. Da blir $\mathcal{H}\left\{x(t-t_o)\right\} = tx(t-t_=)$ som *ikke* er det samme som $y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-t_0)$.

I eksempel ovenfor har vi en situasjon hvor utgangen av ett delsystem blir direkte brukt som inngangen til det neste. Dersom vi, for eksempel representerer forsterkeren med operatoren $\mathcal{H}_1$ og høyttaleren som operatoren $\mathcal{H}_2$ kan vi skrive lydsignalet som

$$x_3(t) = \mathcal{H}_2\{\mathcal{H}_1\{x_1\}\} \tag{1}$$

Vi kan nå definere *den sammensatte operatoren* som det som omformer signalet $x_1(t)$ til $x_2(t)$. Denne nye operatoren betegner vi

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$$

som betyr at *først* benyttes operatoren $\mathcal{H}_1$, og deretter $\mathcal{H}_2$ Dermed kan (1) skrives

$$x_3(t) = \mathcal{H}_{12}\{x_1\} = (\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_2)\{x_1\}.$$

To nyttige signaloperasjoner

I elektroniske og andre systemer som opererer med tidsfunksjoner er det ofte nyttig å operere på selve argumentet til funskjonen, altså tiden. De to vanligste slike operasjoner er *translasjon* og *dilatasjon*.

En translasjonsoperator er "noe" flytter et signal et visst stykke t_0 langs tidsaksen. Den kan defineres ved operatoren $\mathcal{T}_\tau$ slik:

$$\mathcal{T}_{t_0}\left\{x(t)\right\} = x(t-t_0).$$

Når t_0 er en positiv størrelse, vil signalet bli forsinket i vanlig forstand. I teorien er det også mulig å bruke negativ t_0, noe som tilsvarer en *fremskynding* av signalet.

De fleste vinylplater skal avspilles med en hastighet på 33 omdreininger per minutt. Men det finnes også plater innspilt med 45 omdreininger per minutt. Dersom du spiller av platen på feil hastighet får du et signal *som om* tiden går hurtigere eller saktere enn normalt. Dette er et eksempel på *tids-dliatasjon* og kan matematisk beskrives ved *dilatasjonsoperatoren* $\mathcal{D}_a$ definert ved

$$\mathcal{D}_a\left\{x(t)\right\} = x(at).$$

Du har sikkert lært at operasjonen $+$ er kommutativ, det vil si at $a+b = b+a$. Matrisemulitplikasjon er et eksempel på en operasjon som *ikke* er kommutativ, det vil si at det *ikke* alltid er slik at $AB = BA$. For sammensetningsoperatoren $\circ$ gjelder noe lignende. For noen operatorer $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er det slik at $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, for andre er det ikke slik. De to operatorene $\mathcal{T}_\tau$ og $\mathcal{D}_a$ er generelt *ikke kommutative*. Hvordan ser du det?

Konkrete eksempler på translasjon og dilatasjon kan illustreres med følgende eksempel. La x være funksjonen

$$x(t) = e^{-x^2} \cos(2\pi t)$$

som illustrert i figur a). Her ser vi

$$\mathcal{T}_3\{x(t)\} = x(t-3)$$

i figur c) og

$$\mathcal{D}_2\{x(t)\} = x(t/2)$$

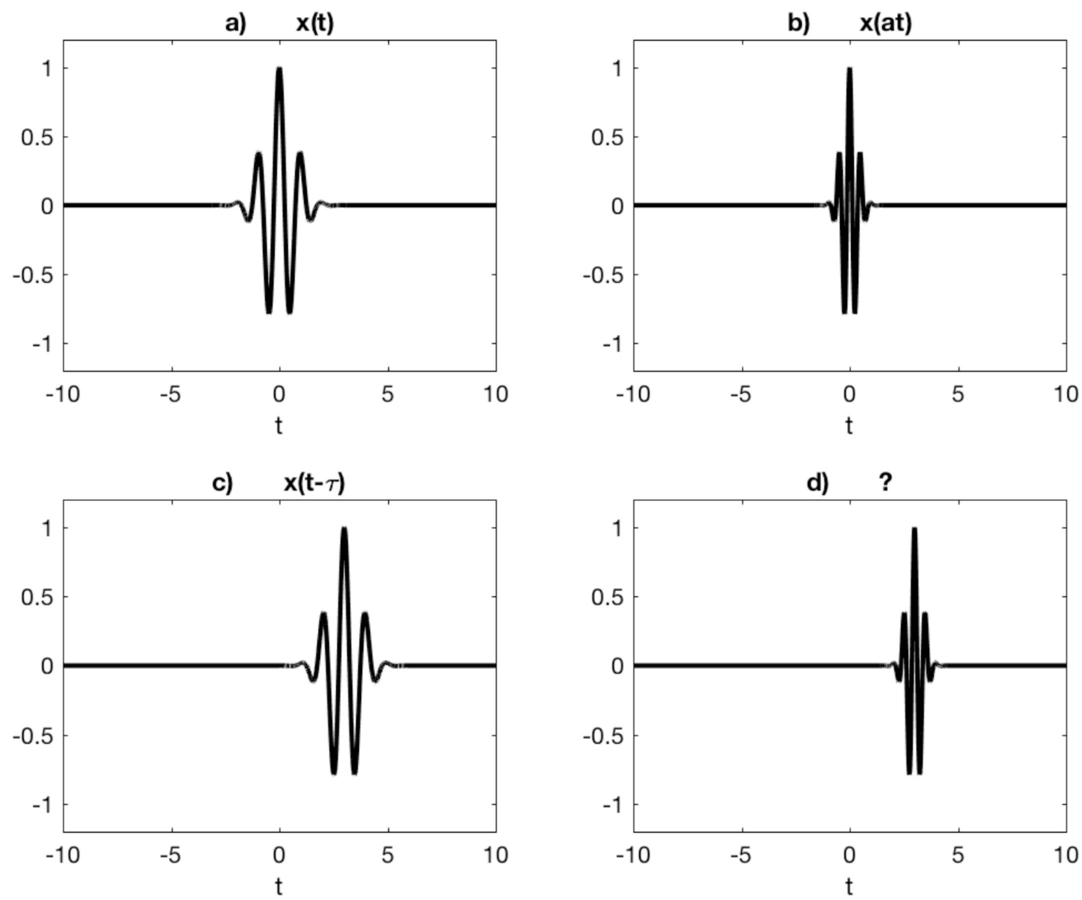
i figur b). Figur d) viser enten

$$\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{D}_2$$

eller

$$\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{T}_3.$$

Hva er riktig?



Integraltransformer

Innen elektronikk og signalbehandling trengs verktøy for å analysere eksisterende systemer og å designe nye. Mange av disse verktøyene er matematiske. Vi har tidligere sett på to viktige "verktøykasser", nemlig lineæralgebra og differensialligninger. I dette kapitlet ser vi på et annet sett av matematiske strukturer, nemlig det som kalles *integraltransformer*. Disse er sentrale for å kunne utføre presise resonnement om lineære system og å tolke hvordan slike vil påvirke hverandre.

Vi så at elektroniske systemer kan betraktes som operatorer som tar inn en funksjon av t og gir ut en annen. Vi skal nå se på en annen type operator, nemlig det som kalles en *transform*. Denne har også en tidsfunksjon $x(t)$ som argument, men gir ut en funksjon av en annen variabel, som vi ofte kaller s. Dersom vi kaller selve transformen $\mathcal{T}$, kan dette skrives

$$X(s) = \mathcal{T}\left\{x(t)\right\}.$$

Vi bruker her konvensjonen at tidsfunksjonen skrives med liten bokstav x og den tilsvarnde *transformerte* funksjonen med stor X.

Konvolusjon

En binær operator er "noe" som gjør noe med to elementer i en mengde slik at vi får et nytt element. Kjente eksempler fra tallmengder er "vanlig" addisjon og multiplikasjon. Dette generaliserer vi enkelt til reelle funksjoner, slik at vi kan få en ny funksjon ved å addere resultatet av to andre. Vi kan altså danne oss funksjonen $x(t)$ ut fra to andre funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ ved

$$z(t) = x(t) + y(t).$$

Tilsvarende kan vi gjøre med mulitplikasjon.

Vi skal nå se på en type binære operator på rommet av integrerbare funksjoner som *ikke* er generaliseringen av en "kjent" operator på tall. Dette er *konvolusjonsoperatoren*. Ved hjelp av denne kan vi danne oss en funksjon $z(t)$ ut fra to andre funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ ved

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)y(t-\theta)\,d\theta. \tag{2}$$

Vi presiserer altså at symbolet $*$ *ikke* står for multiplikasjon, og resultatet av operatoren er *ikke* et tall men en ny *funksjon*. Det finnes forskjellige typer konvolusjoner, og det er stort sett integrasjonsgrensene som skiller dem. Hvilken type integrasjonsgrenser som er mest relevant, kommer litt an på anvendelsen, men vi begynner altså med den her.

Viktig regel

Det er lett å vise at konvolusjonsoperatoren er kommutativ, altså at

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

Anta at vi har funksjonene

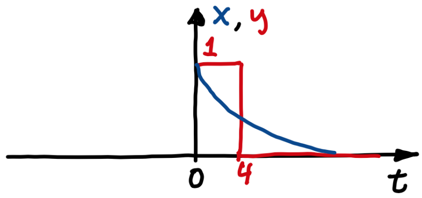
$$x(t) = u(t)e^{-t}$$

og

$$y(t) = u(t) - u(t-4)$$

hvor $u(t)$ er heavisidefunksjonen definert ved

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

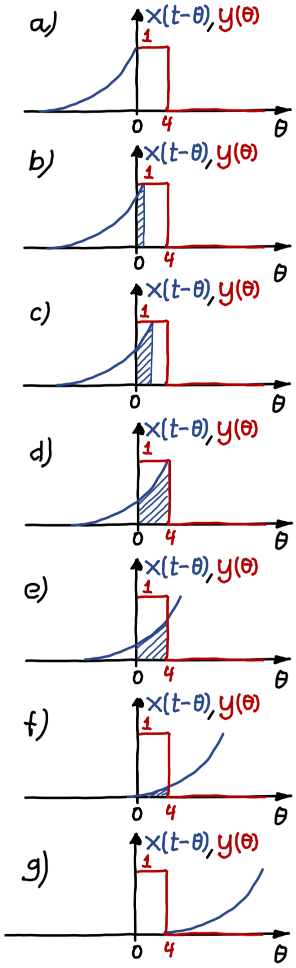


Det vil si at $x(t)$ er null for negative t og eksponensielt avtagende for $t > 0$, og $y(t)$ er en firkantpuls av lengde 4 som starter i $t = 0$.

Konvolusjonen vi skal studere er altså integralet

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) * y(t) &= y(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)x(t-\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)e^{-(t-\theta)}\, d\theta \end{aligned}$$

For å forstå hva konvolusjonsoperatoren "gjør" må vi se nærmere på selve integralet. Det er da viktig å merke seg hva som er integrasjonsvariabelen, nemlig θ. Den "egentlige" tidsvariabelen t kan nå regnes som en konstant innenfor integraltegnet, og angir en transalasjon av funksjonen $x(\theta)$ langs θ-aksen. Dette har vi prøvd illustrert i figur .
Figur a) illustrerer situasjonen for $t = 0$. $y(\theta)$ ser nøyaktig likedan ut som i figur . Men $x(t-\theta)$ har blitt speilet om vertikalaksen siden det er kommet et minustegn foran θ. Siden $t = 0$ er det altså $x(-\theta)$ som er tegnet. Og her har vi opphavet til ordet "konvolusjon". Det betyr "bretting" eller "foldning". På samme måte som en konvolutt er "brettet" rundt et brev. På norsk er også "folding" ofte brukt i stedet for "konvolusjon".
Hva skjer så videre i integralet? Jo, vi tar produktet av de to funksjonene. I situasjonen $t = 0$ blir dette produktet null, siden minst en av funksjonene er null for hvert punkt på θ-aksen.
I Figur b) har vi satt $t = 1$. Da har vi et overlapp av områder hvor begge funksjonene er forskjellig fra null, og vi får et integral indikert ved det skarverte området. Videre i figur c-g) ser vi hvordan overlappet og integralet varierer ettersom t øker.



Så det konvolusjonen "gjør" er altså for hver eneste verdi av t:

1. "brette" funksjonen $x(\theta)$ om vertikalaksen
2. translere den distansen t langs θ-aksen
3. multiplisere med $y(\theta)$
4. integrerer resultatet fra $-\infty$ til ∞.

Når vi nå har sett på dette grafisk, la oss finne matematisk hvordan den resulterende funksjonen $z(t) = x(t) * y(t)$ blir.

Vi ser først på tilfellet $t < 0$. Da får vi (enda tydeligere enn i figur a) at det ikke noe overlapp mellom funksjonene, og integralet blir lik 0, altså

$$z(t) = x(t) * y(t) = 0$$

Videre, for $0 < t < 4$ har vi en situasjon hvor funksjonene overlapper i intervallet $\theta \in (0, t)$ (se figur b–d). Her er $y(\theta) = 1$ og vi får

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) * y(t) &= \int_0^t x(\theta) \cdot 1; d\theta = \int_0^t e^{t-\theta} \cdot 1; d\theta \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

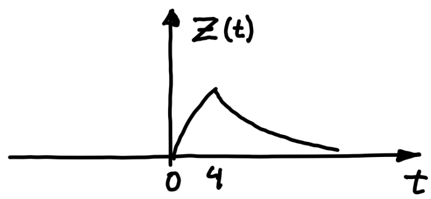
(Sjekk at du er med på denne utregningen. Her er det virkelig viktig å holde orden på hva som er integrasjonsvariabel og ikke.)

Til slutt har vi tilfellet $t > 4$ (figur e–g.) Da er overlappingsområdet $\theta \in (0, 4)$ og integrasjonsgrensene tilsvarende, altså:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) * y(t) &= \int_0^4 e^{t-\theta} \cdot 1; d\theta \\ &= e^{-t}\left(e^{-4} - 1\right). \end{aligned}$$

Det komplette uttrykket for $z(t)$ blir altså

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{for } 0 < t < 4 \\ e^{-t}\left(e^{-4} - 1\right) & \text{for } t > 4, \end{cases}$$



og vi har skissert formen i figuren ved siden av.

Fouriertransform

Dette er noe som har en spesiell plass i elektroingeniørens hjerte.

Fouriertransform

Fouriertransformen til f er

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{3}$$

der ω er en reell variabel.

Siden

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele t-aksen. Det er vanlig å kreve at x er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty. \tag{4}$$

Det er mulig å slakke noe på dette kravet, med det skal ikke vi gjøre.

Inngangsbillett til fouriertansform

Dersom x er absolutt integrerbar, konvergerer integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt.$$

absolutt.

I beviset får vi bruk for at funksjonen $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ er en parametrisering av enhetssirkelen, med $|e^{-i\omega t}| = 1$ for alle ω og t.

Dersom ω og x er reelle, er $|e^{-i\omega t}| = 1$, slik at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-i\omega t}| \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty. \end{aligned}$$

Vi har tilgang på en formel for den inverse transformen, men her trengs strengere krav på regulariteten til signalet.

Invers fouriertransform

Dersom $x(\omega)$ er glatt og alle deriverte synker raskt nok når $t \to \infty$, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega. \tag{5}$$

Hva betyr det at alle deriverte synker raskt nok når $t \to \infty$? Det er vanlig å kreve at

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^k \left| \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right| < \infty$$

for alle k og n, for da er det ikke så vanskelig å bevise at inversformelen gjelder (det er fremdeles litt for vanskelig for oss). Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på den ovennevnte integrasjonsteorien oppfunnet av Lebesgue. Vi skal fouriertransformere funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet, så vi får bare lukke øynene og håpe at det går bra. Men det går allikevel an å få en ide om hvorfor inversformelen er som den er ved å ta en titt tilbake på fourierrekker.

Hva betyr dette?

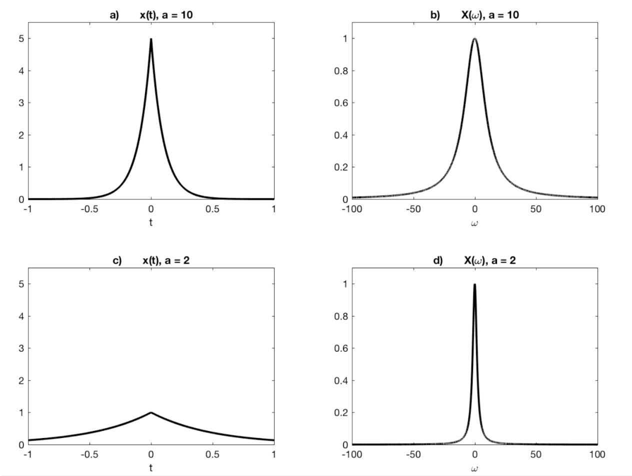
På samme måte som at en fourierrekke uttrykker et periodisk signal som en sum av frekvenskomponenter, viser (5) at dette også kan gjøres for "alle" signaler, enten de er periodiske eller ikke. Det at summen går over til et integral, betyr bare at frekvenskomponentene ligger uendelig tett. Tar vi absoluttverdien til fouriertransformen, viser $|X(\omega)|$ "hvor mye" av frekvensen ω som er til stede i signalet $x(t)$. Dette forutsetter naturligvis at signalet $x(t)$ har en fouriertransform, men som nevnt tidligere er de aller fleste signaler av ingeniørmessig interesse fouriertransformerbare.

Fouriertransformen til et signal omtales ofte som signalets *spektrum*. Størrelsene $|X(\omega)|$ og $\angle X(\omega)|$ kalles tilsvarende *amplitudespektrum* og *fasespektrum*.

Vi vil se på funksjonen

$$x(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t|} \tag{6}$$

der $a > 0$. I figur 1 a) og c) ser vi to varianter av funksjonen med henholdsvis "stor" ($a = 10$) og "liten" ($a = 2$) verdi av konstanten a.



Figur 1: Funksjonen $x(t)$ fra (6) og den fouriertransformerte $X(\omega)$ for ulike verdier av a.

$x(t)$ avtar raskt både for store positive og store negative verdier av t, så det er lett å vise at betingelsen (4) er oppfylt slik at den har en fouriertransform. Denne kan da beregnes slik:

$$\begin{aligned}
X(\omega) = \mathcal{F}(e^{-a|t|}) &= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{a}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}\,dt\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-t(a+i\omega)}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-i\omega)}\,dt\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega}\right) \\
&= \frac{a^2}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \qquad (7)
\end{aligned}$$

$$\tag{8}$$

Det første vi merker oss ved $X(\omega)$ er at den er reell. Det er ikke vanlig. For de fleste funksjoner vil den fouriertransformerte være kompleks-valuert. Det kan vises (prøv, det er ikke vanskelig) at $X(\omega)$

alltid blir reell når $x(t)$ er en like funksjon. Videre ser vi i figur 1 a) og c) at når jo større a er, jo smalere blir grafen til $x(t)$. Dette samsvarer med at $x(t)$ slik den er definert kan skrives

$$x(t) = \mathcal{D}_a \left\{ e^{-|t|} \right\}$$

som altså tilsvarer en skalering av tidsaksen.

Samtidig ser vi fra figur 1 b) og d) at det omvendte gjelder for fouriertansformen; den blir bredere jo større a er. Ser vi på uttrykket for $X(\omega)$ finner vi at denne også kan skrives som en dilatasjon, men denne gangen med $1/a$

$$X(\omega) = \mathcal{D}_{1/a} \left\{ \frac{1}{1-\omega^2} \right\}.$$

Dette resultatet er ikke spesielt for den valgte funksjonen, men noe som kan formuleres som en regel som alltid gjelder for en vilkårlig funksjon:

Dilatasjonsregelen

Dersom funksjonen $x(t)$ har fouriertransform $X(\omega)$, gjelder

$$\mathcal{F}\left\{x(at)\right\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Hva betyr dette?

En litt uformell tolking av dilatasjonsregelen kan formuleres som at dersom du gjør noe *smalere* i tidsdomenet, blir det *bredere* i frekvensdomenet. Eller: *korte* pulser har høy båndbredde. Dette vet alle som steller med signalbehandling: Dersom man skal overføre mye informasjon, bruker man korte pulser, og da trengs større frekvensspekter for å overføre dem.

Transformpar

De to funksjonene $x(t)$ og $X(\omega)$ fra (6) og (7) danner det vi kaller et *transformpar*, det vil si to funksjoner der vi kan gå fra den ene til den andre ved fourier- eller invers fouriertransform. Vi skriver dette slik:

$$\frac{a}{2} e^{-a|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

Men det er mer å lære av eksempel . Dersom vi ser på figur 1 igjen, ser vi at når funksjonen blir bredere i tid, er høyden mindre. Man kan kanskje visuelt se at arealet under grafen er ganske likt i de to figurene. Det er faktisk lett å vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2} e^{-a|t|} dt = 1, \tag{9}$$

altså uavhengig av a.

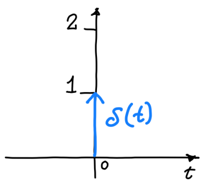
La oss så se på den fouriertransformerte $X(\omega)$. Fra figur 1 ser vi at denne har maksimum for $X(0) = 1$. Vi ser også at "humpen" rundt $t = 0$ blir bredere ettersom a øker. Faktisk, og dette ser du lett, vil $X(\omega) \to 1$ for *alle* verdier av ω når $a \to \infty$.

Tilbake til $x(t)$. Vi ser altså at den både blir smalere med økende a *og* høyere. Disse to tendensene kompenserer hverandre slik at integralet (9) blir 1 for alle verdier av a. Men merk at når $a \to \infty$, vil

$x(t) \to 0$ for alle $t \neq 0$. I grensen får vi det som kalles *delta-pulsen* eller *Dirac-pulsen*[1] som betegnes $\delta(t)$.

Mer om deltapulsen

Vi introduserte deltapulsen som et slags grenseverdi til funksjonen $x(t)$ i (6) når $a \to \infty$. Da hadde vi at $x(t) \to \infty$ for $t = 0$ og $x(t) \to 0$ for alle andre verdier av t. Denne oppførselen gjør at vi ofte symboliserer deltapulsen med en pil som vist figur 2.



Figur 2: Grafisk fremstilling av delta-pulsen plassert i $t = 0$. Høyden på pilen angir intgralet, som er lik 1.

Et resultat av dette er at

$$\int_a^b \delta(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{når } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

hvis og bare hvis $0 \in (a, b)$. Det vil si at dersom $t = 0$ er inneholdt i integrasjonsområdet er integralet lik 1, ellers er det null. Derfor kan deltapulsen brukes til å "plukke ut" verdien til en funksjon i punktet $t = 0$ ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0).$$

(Her kunne vi også ha brukt andre integrasjonsgrenser, så lenge $t = 0$ er med i integrasjonsområdet.) Tilsvarende gjelder dersom vi translerer delta-pulsen. Då får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0). \tag{10}$$

Den umiddelbare nytten av et slikt resultat kan være vanskelig å få øye på, men vi skal snart se at denne "plukke-ut-egenskapen" er nøkkelen til hvorfor impulsresponsen til et system er så viktig.

Impulsresponsen

Mange systemer (for eksempel elektroniske eller mekaniske) kan modelleres som lineære og tidsinvariante. Det vil si at utgangen $y(t)$ av systemet er løsningen av en lineær, autonom differensialligning med konstante koeffisienter som har inngangen (påtrykket) $x(t)$ på høyre side av likhetstegnet. Løsningen av en slik differensialligning kan som kjent skrives

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t).$$

Her er $y_h(t)$ en løsing av den homogene ligningen, og er således uavhengig av påtrykket $x(t)$, mens $y_p(t)$, den *partikulære løsningen*. I mange praktiske situasjoner, går vi ut ifra at den homogene løsningen er lik null, det vil si at vi bare er interessert i den partikulære løsningen.

[1]Enkelte bruker ordet "delta-funksjonen", men vi unngår å bruke dette ordet, da $\delta(t)$ ikke er definert for $t = 0$ og således ikke egentlig er noen veldefinert funskjon for denne verdien av t.

Det skal snart vise seg at det i en slik situasjon er spesielt interessant så se på utgangen av systemet når inngangen er en delta-puls, altså $x(t) = \delta(t)$. Formen på utgangen i dette tilfellet kalles systemets *impulsrespons* og er så viktig at den har fått et eget symbol $h(t)$ og er altså gitt ved

$$h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}.$$

Vi skal ikke for øyeblikket bry oss så mye om hvordan man finner denne funksjonen, men bare anta at vi kjenner den. Grunnen til at den er så viktig kommer nå.

La oss tenke oss at vi har et *vilkårlig* signal $x(t)$ på inngangen. Vi kan da skrive

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{x(t)\right\}.$$

Nå bruker vi "plukke-ut"-egenskapen til deltapulsen og får

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\delta(t-\theta)d\theta\right\}.$$

Nå er både $\mathcal{H}$ og integralet lineære operatorer. Dersom vi i tillegg antar at de er kommutative (Morten: sjekk) kan vi flytte $\mathcal{H}$ innenfor integralet og får:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\left\{x(\theta)\delta(t-\theta)\right\} d\theta.$$

For en bestemt verdi av θ, kan denne betraktes som en konstant, og siden $\mathcal{H}$ er lineær, kan vi trekke denne ut slik:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\mathcal{H}\left\{\delta(t-\theta)\right\} d\theta.$$

Til slutt bruker vi antagelsen om at systemet er tidsinvariant. Siden $h(t) = \mathcal{H}\left\{\delta(t)\right\}$ gir det

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)h(t-\theta)d\theta.$$

Sammenligner vi dette med definisjonen av konvolusjon (2), ser vi at

$$y(t) = x(t) * h(t), \tag{11}$$

altså at utgangen av det lineære systemet er gitt som konvolusjonen av inngangen med impulsresponsen av systemet.

Hva betyr dette?

Det teoretiske resultatet vi nettopp har sett på har viktige praktiske konsekvenser. Mange fysiske systemer, så som et elektronisk filter, en konsertsal eller radiobølger som brer seg i rommet, kan modelleres som et tidsinvariant lineært system. Det vil si at *det finnes* en lineær differensialligning med konstante koeffisienter som beskriver systemets oppførsel. Resultatet (11) sier at dersom vi kjenner impulsresponsen, trenger vi verken kjenne differensialligningen eller løse den. Men, vi må være i stand til å utføre et konvolusjonsintegral. Det siste er fint mulig med numeriske metoder. Hva med impulresponsen $h(t)$? Den kan estimeres (måles) direkte eller indirekte. En direkte måte er å påføre systemet en meget kort, kraftig puls, som en tilnærming til deltapulsen $\delta(t)$ og måle resultatet. Indirekte metoder kommer vi snart tilbake til.

Et fundamentalt resultat

Som vi nettopp har sett, er konvolusjon et viktig begrep når vi har å gjøre med lineære tidsinvariante systemer. En ulempe med konvolusjon sammnelignet med mange andre operatorer, er at selve integralet som inngår i definisjonen er litt uryddig. En grunn til at fourier- (og laplace-)tranformen er så nyttig, er følgende transformpar:

Konvolusjonsteoremet

$$x(t) * y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)Y(\omega),$$

eller på norsk: "Konvolusjon i tidsdomenet tilsvarer multiplikajon i frekvensdomenet."

Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{x(t) * y(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\,dv\,e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x-v)\,e^{-i\omega t}\,dv\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u)\,e^{-i\omega(u+v)}\,dv\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,e^{-i\omega v}\,dv\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\,\mathcal{F}(x)\,du \\
&= \mathcal{F}\left\{x\right\}\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\,du \\
&= \mathcal{F}\left\{x\right\}\mathcal{F}\left\{y\right\} = X(\omega)Y(\omega)
\end{aligned}$$

Hva betyr dette?

Konvolusjonsteoremets betydning blir spesielt viktig når vi ser det i sammenheng med impulsresponsens rolle. Fra (11) har vi at utgangen av et system med inngang $x(t)$ og impulsrespons $h(t)$ er gitt ved $y(t) = h(t)*x(t)$. Konvolusjonsteoremet sier da at spekteret til utgangssignalet er gitt ved

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

hvor $X(\omega)$ er inngangssignalets spektrum. Uttrykket $H(\omega) = \mathcal{F}\left\{h(t)\right\}$ er det som vi straks skal definere som systemets *frekvensrespons.*

En viktig generalisering

Da vi innførte fouriertransformen for en generell funsksjon $x(t)$, satte vi som krav at $x(t)$ måtte være absolutt integrerbar. Ikke alle funksjoner som vi er interessert i *er* absolutt integrerbar, men det er faktisk meningsfullt å bruke fouriertransformen på noen av dem likevel. En funksjon som stadig dukker opp i elektroteknikken er den komplekse eksponentialfunksjonen

$$x(t) = e^{i\omega_0 t},$$

og det er ikke så vanskelig å se at kravet () ikke er oppfyllt for denne. Likevel vil vi definere fourertransformen for $x(t)$, og for å vise at det stemmer, går vi en omvei. Vi starter med å påstå at

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{i\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{12}$$

Oppgave: Vis at

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi\delta(\omega - \omega_0)\right\} = e^{i\omega_0 t}.$$

Hvilke andre typer funksjoner har vi som ikke er absolutt integrerbare? Jo, for eksempel alle periodiske funksjoner. Men disse kan skrives som en fourierrekke, og da kan vi benytte (12) på hvert av leddene i rekken, slik at vi for en periodisk funksjon $x(t)$ får en fouriertransformert på formen

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - \omega_n)$$

hvor $\{c_n\}$ er fourierkoeffisientene til funksjonen.

Hva betyr dette?

I elektroteknikken er frekvensresponsen $H(\omega)$ til et system et kompleks tall som forteller hvordan utgangen $y(t)$ til systemet blir når inngangen er på formen

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

For denne bestemte typen inngangssignal, blir da utgangen lik

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}. \tag{13}$$

For et system sammensatt av lineære kretselement, kan $H(\omega)$ finnes ved hjelp av Kirchhoffs lover og impedansene i kretsen. Ved hjelp av konvolusjonsteoremet har vi nå en annen måte å finne frekvensresponsen på ved uttrykket $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. Dersom man for eksempel har målt impulsresponsen $h(t)$ til et ukjent system, kan altså frekvensresponsen finnes ved en fouriertransform. Og omvendt: Dersom man har målt frekvnesresponsen, for eksempel med en bode-analysator, kan impulsresponsen finnes ved invers fouriertransform.

Oppgave: Gitt et system med impulrespons $h(t)$. Vis at utgangen er gitt ved (13) når inngangen er

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Derivasjonsregelen

Dersom $x(\omega)$ er glatt og alle deriverte synker raskt nok når $t \to \infty$, er

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = i\omega\mathcal{F}\{x\}$$

Dette fikser vi med en liten delvisintegrasjon. Husk at $\lim_{x\to\pm\infty} x(t) = 0$ siden x er absolutt konvergent.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\dot{x}) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-i\omega t}\, dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega x}\, dx \\
=& i\omega \mathcal{F}(x)
\end{aligned}$$

□ Vi beregner

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t}\, dt$$

Dette er litt jobb. Derivasjonsregelen over gir

$$\mathcal{F}(-2te^{-t^2}) = i\omega \mathcal{F}(e^{-t^2}).$$

Men vi kan også observere at

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-2te^{-t^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -2te^{-t^2} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ite^{-t^2} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= -2i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}).
\end{aligned}$$

Vi mangler litt vanskelig teori for å være helt sikker på den siste beregningen, men vi lar den passere allikevel. Hvis vi setter disse uttrykkene lik hverandre, får vi differensiallikningen

$$i\omega \mathcal{F}(e^{-t^2}) = -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2})$$

eller

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}) + \frac{\omega}{2} \mathcal{F}(e^{-t^2}) = 0$$

for $\mathcal{F}(e^{-t^2})$. Integrerende faktor er

$$e^{\omega^2/4},$$

slik at

$$\frac{d}{d\omega} \left(e^{\omega^2/4} \mathcal{F}(e^{-t^2}) \right) = 0$$

eller

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = Ce^{-\omega^2/4}.$$

Senere i semesteret skal vi se at

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

som gir

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}.$$

Dersom $a > 0$, kan vi gjøre den samme beregningen og få

$$\mathcal{F}(e^{-at^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}.$$

Flere regneregler

Tidsskift

$$\mathcal{F}\left\{x(t-\theta)\}\right) = e^{-i\omega\theta} X(\omega)$$

Frekvensskift

$$\mathcal{F}\left\{e^{i\theta t} x(t)\right\}) = X(\omega - \theta)$$

Tidsskalering

$$\mathcal{F}\left\{x(at)\right\}) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$