ANNEN ORDENS LIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFISIENTER OG UBESTEMTE KOEFFISIENTERS METODE

Gitt en annenordens lineær differensialligning med **konstante koeffisienter**

$$(*) \quad y'' + ay' + by = r(x)$$

med tilhørende **homogen** ligning

$$(**) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Den **karakteristiske ligningen** er

$$(1) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Den **homogene** ligningen $(**)$ løses ved løse (1):

1) Hvis (1) har to **enkle** reelle røtter (dvs. forskjellige reelle røtter) λ_1 og λ_2, så er generell løsning av $(**)$ gitt ved $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.
2) Hvis (1) har en **dobbelrot** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, så er generell løsning av $(**)$ gitt ved $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$.
3) Hvis $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$ er **komplekse** røtter av (1), så er generell løsning av $(**)$ gitt ved $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Nedenfor er en tabell over formen på en **partikulær løsning** y_p av den **inhomogene** ligningen $(*)$ for **visse** høyresider $r(x)$. Her betegner $P_n(x)$ et polynom av grad $n \geq 0$, $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ der $a_n \neq 0$. Merk også at c og α er lik 0 når det ikke inngår noen eksponentialfunksjon i $r(x)$.

<table>
<tr><th>$r(x)$</th><th>y_p</th></tr>
<tr><td>a)
$P_n(x)e^{cx}$</td><td>$x^m(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)e^{cx}$
der
$m = \begin{cases} 0 \text{ hvis } c \textbf{ ikke} \text{ er rot i (1)} \\ 1 \text{ hvis } c \text{ er en } \textbf{enkel} \text{ rot i (1)} \\ 2 \text{ hvis } c \text{ er en } \textbf{dobbel} \text{ rot i (1).} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>b)
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos \beta x$
eller
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin \beta x$</td><td>$x^m[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)e^{\alpha x}\cos \beta x +$
$(B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n)e^{\alpha x}\sin \beta x]$
der
$m = \begin{cases} 0 \text{ hvis } \alpha \pm i\beta \textbf{ ikke} \text{ er rot i (1)} \\ 1 \text{ hvis } \alpha \pm i\beta \textbf{ er} \text{ rot i (1).} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hvis $r(x)$ er en sum av ledd som i a) og b), summeres y_p-ene tilsvarende.</td></tr>
</table>