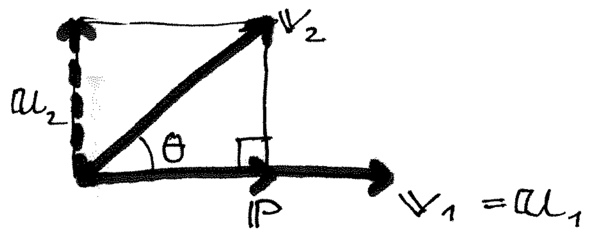
# ELA 5.4:

## ORTOGONAL BASIS OG GRAM-SCHMIDT ALGORITMEN

Problem (*) Gitt vektorrom $V$ i $\mathbb{R}^n$ med basis $\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_p$ $(2 \le p < n)$. Ønsker en ortogonal basis.

Hva gjør vi? Ser på problemet når $V$ er i $\mathbb{R}^3$ med basis $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$. (Håper å finne en formel som vi kan generalisere!)



Sett $\boxed{\mathbb{u}_1 = \mathbb{v}_1}$

$$\mathbb{p} = |\mathbb{v}_2| \cos\theta \frac{\mathbb{v}_1}{|\mathbb{v}_1|}$$

$$= \underbrace{|\mathbb{v}_2||\mathbb{v}_1|\cos\theta}_{\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{v}_1} \frac{\mathbb{v}_1}{|\mathbb{v}_1|^2}$$

Altså har vi

$$\mathbb{p} = \frac{\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{v}_1}{\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_1} \mathbb{v}_1 = \frac{\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{u}_1}{\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1} \mathbb{u}_1$$

(prosjeksjonen av $\mathbb{v}_2$ langs $\mathbb{u}_1$)

$$\boxed{\mathbb{u}_2 \underset{def}{=} \mathbb{v}_2 - \mathbb{p} = \mathbb{v}_2 - \frac{\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{u}_1}{\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1} \mathbb{u}_1}$$

$$\left( \mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_1 = \mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{u}_1 - \mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{u}_1 = \underline{0} \right)$$

Denne ideen kan vi videreføre til det generelle tilfellet (*):

Gram-Schmidt ortogonaliseringsmetode.

Gitt en basis $\mathbb{v}_1, \cdots, \mathbb{v}_p$ for et underrom $V$ i $\mathbb{R}^n$ $(2 \le p < n)$. Definer

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1$, $u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 - \left(\frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2$

...

$$u_p = v_p - \left(\frac{v_p \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 - \cdots - \left(\frac{v_p \cdot u_{p-1}}{u_{p-1} \cdot u_{p-1}}\right) u_{p-1}$$

Da er $u_1, \dots, u_k$ parvis ortogonale.
og dessuten $\mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_k\} = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ alle $k \leq p$.

<u>Korollar</u> $u_1, \dots, u_p$ er en ortogonal basis for V.

<u>Bevis for G-S (ved induksjon).</u>

P(k): $u_1, \dots, u_k$ er parvis ortogonale og
$\mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_k\} = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$

P(1) ok, evt. P(2) ok siden vi regnet på dette.

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ :

- $u_{k+1} = v_{k+1} - \frac{v_{k+1} \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \cdots - \frac{v_{k+1} \cdot u_k}{u_k \cdot u_k} u_k$

  slik at $u_{k+1} \cdot u_i = v_{k+1} \cdot u_i - v_{k+1} \cdot u_i = 0$ for $1 \leq i \leq k$,

  og $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ er parvis ortogonale.

- $\mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\} \subseteq \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$
  pr konstruksjon
  Da begge rommene er $(k+1)$ dim., må de være like.

$\square$

#12) $u_1 = v_1 = \underline{(1,1,0,0)}$

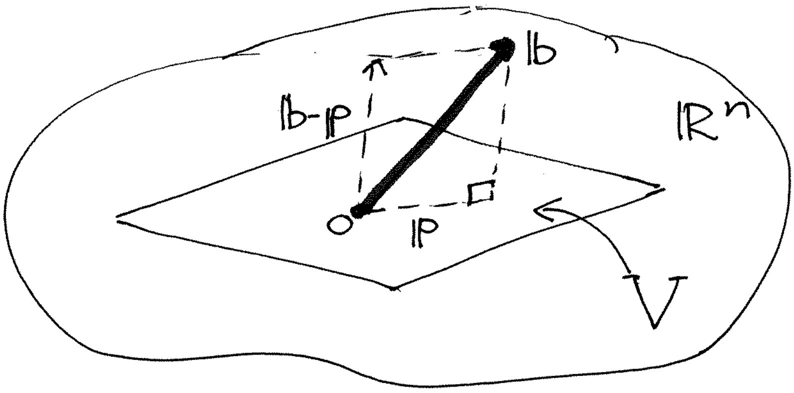
$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (2,0,1,0) - (1,1,0,0) = \underline{(1,-1,1,0)}$

$\tilde{u}_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} = \cdots = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}(1,-1,-2,3)$

$u_3 = \underline{(1,-1,-2,3)}$ „HELE TALL"

Også

<u>Def.</u> Med (den ortogonale) <u>projeksjonen</u> <u>av</u> $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ på [into] $V \subset \mathbb{R}^n$ forstår vi vektoren $\mathbb{p} \in V$ slik at $\mathbb{b} - \mathbb{p} \in V^\perp$.




**T1.** Dersom $u_1, \cdots, u_p$ er en ortogonal basis for $V \subset \mathbb{R}^n$, så er

$$\mathbb{p} = \frac{\mathbb{b} \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \cdots + \frac{\mathbb{b} \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

<u>Bevis.</u>

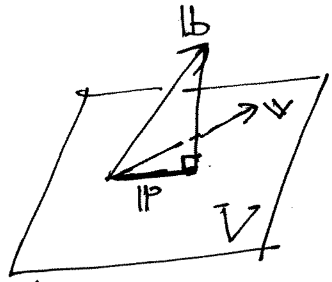
For $k = 1, \cdots, p$ har vi

$$(\mathbb{b} - \mathbb{p}) \cdot u_k \underset{\uparrow}{=} \mathbb{b} \cdot u_k - \frac{\mathbb{b} \cdot u_k}{u_k \cdot u_k} u_k \cdot u_k = 0 \qquad \square$$

$u_k \cdot u_j = 0$ når $k \neq j$

<u>Nevner</u> : Resultatet

$$\min_{\mathbb{v} \in V} |\mathbb{b} - \mathbb{v}| = |\mathbb{b} - \mathbb{p}|$$




er grunnleggende i forbindelse med approksimasjon („beste approksimasjon til $\mathbb{b}$ i $V$ er $\mathbb{p}$" )